

Brescia, 25 febbraio 2011

Allenamenti di matematica: simulazione della disfida

Le risposte vanno indicate con numeri di 4 cifre; se la risposta contenesse più di 4 cifre, andranno indicate solo le ultime 4. Se la risposta contenesse meno di 4 cifre è necessario anteporre la cifra 0 quante volte occorre. Se il quesito non ha soluzione unica la risposta deve essere 9999.

1. Siano a, b, c le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$. Sapendo che $ab = 10$, calcola $-c(a + b)$. [28, 20 punti]
2. Sia n il più piccolo intero positivo maggiore di 200 che si può scrivere sia come somma di 5 interi consecutivi, sia come somma di 6 interi consecutivi, sia come somma di 7 interi consecutivi. Quanto vale n ? [315, 20 punti]
3. Siano a, b, c tre numeri positivi dispari distinti e minori di 100. Quanto può essere al massimo il loro massimo comune divisore? [19, 20 punti]
4. Qual è il massimo numero costruibile mediante un'espressione nella quale si usano soltanto le operazioni di somma, sottrazione, prodotto e divisione, nella quale compaiano tutti e soli i numeri da 1 a 7 ciascuno una sola volta? [7560, 20 punti]
5. Una piramide a base quadrata ha il lato di base lungo $\sqrt{3}$ e tutti gli spigoli delle facce laterali sono lunghi $\sqrt{2}$. Quanti gradi misura l'angolo fra due spigoli non appartenenti alla stessa faccia laterale? [120, 20 punti]
6. Quanti numeri di tre cifre si possono formare con 1,2,3,5,7 facendo in modo che nessuna cifra venga ripetuta e che i numeri ottenuti siano multipli di 3? [24, 20 punti]
7. La figura 1 è la mappa di una città. Un turista vuole spostarsi dall'angolo in basso a sinistra all'angolo in alto a destra lungo le strade facendo il percorso più breve possibile. In quanti modi può farlo? [3003, 20 punti]
8. In quanti modi si possono disporre tutti i numeri naturali da 1 a 9 nelle nove caselle del quadrato (vedi figura 2) in modo che i numeri presenti su due caselle contigue (in orizzontale e in verticale) non diano mai prodotto e somma entrambi pari? [17280, 40 punti]
9. In quanti modi si possono disporre tutti i numeri naturali da 1 a 7 nella figura 3, in modo che la somma dei numeri posti ai vertici dei triangoli ombreggiati, triangolo per triangolo, sia sempre la stessa? [144, 40 punti]

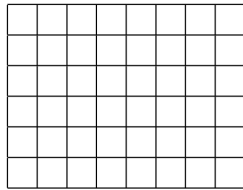


Figure 1:

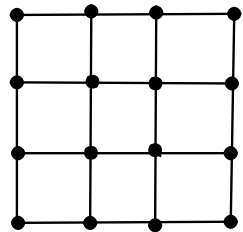


Figure 2:

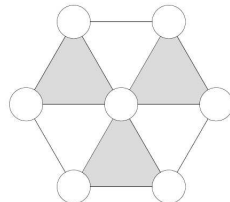


Figure 3:

10. In quanti modi possono essere distribuite 7 animali diversi in 4 recinti separati, se ogni recinto deve contenere almeno un animale? [8400, 40 punti]
11. Un'urna contiene 35 monete con inciso, su entrambe le facce, Testa, 20 monete con inciso, su entrambe le facce, Croce, e 15 monete riportanti i classici simboli Testa e Croce. Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia. Sapendo che è uscita Testa, qual è la probabilità che l'altra faccia riporti il simbolo Testa? Come risposta indicare la somma di numeratore e denominatore del risultato espresso come frazione ridotta ai minimi termini. [31, 40 punti]
12. Sono assegnate due urne che contengono palline colorate: l'urna A1 contiene 1 pallina bianca, 2 palline nere e 3 palline verdi; l'urna A2 contiene 3 palline bianche, 1 nera

e 2 palline verdi. Si lancia un dado e se la faccia in alto presenta il numero 3 o 4 si estrae una pallina dall'urna A1, altrimenti si estrae una pallina dall'urna A2. Sapendo che la pallina estratta è verde, calcolare la probabilità che sia stata estratta dall'urna A1, e indicare come risposta la somma di numeratore e denominatore di tale risultato espresso in frazione ridotta ai minimi termini. [10, 40 punti]

13. Sia $ABCD$ un parallelogramma. Si sa che il lato AB misura 6, l'angolo \widehat{BAD} misura 60° e l'angolo \widehat{ADB} è retto. Sia P il baricentro del triangolo ACD . Calcolare il valore del prodotto delle aree del triangolo ABP e del quadrilatero $ACPD$. [27, 40 punti]

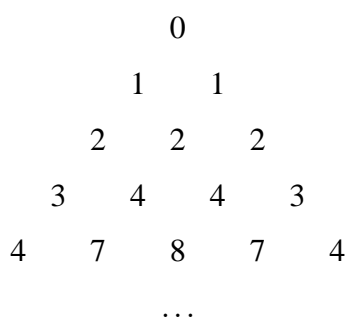
14. Lorenza si trova su una pista avente la forma di un poligono regolare con 2007 lati, i cui vertici sono numerati da 1 a 2007 in senso antiorario. Lorenza, partendo dal vertice 6, salta ogni volta 4 vertici e cade sul quinto più avanti (ad esempio, dal 20 salta al 25), ma salta indietro di 2 vertici quando cade su un vertice identificato da una potenza di 2 (ad esempio, dopo un eventuale salto dal 27 al 32, deve saltare indietro al 30). Dopo quanti salti Lorenza avrà oltrepassato per la prima volta il vertice 1? [405, 40 punti]

15. Un polinomio $p(x)$ di grado 2011 soddisfa

$$p(0) = 0, \quad p(1) = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{2}{3}, \quad \dots, \quad p(2011) = \frac{2011}{2012}.$$

Determinare $p(2012)$ (scrivendo il risultato come somma di numeratore e denominatore ridotti). [1, 40 punti]

16. Dato il triangolo che ha sui lati i numeri $0, 1, 2, 3, \dots$, come in figura, e tale che ogni numero interno è somma dei due che gli stanno sopra, sia $f(n)$ la somma dei numeri della riga che inizia con n . Qual è il resto della divisione $f(2003)/2003$?



[2, 40 punti]

17. Calcola la somma di tutti gli interi positivi a tali che il polinomio $x^2 - ax + 4a$ abbia solo soluzioni intere positive. [59, 40 punti]

18. Vogliamo ricoprire il fondo di una piscina rettangolare con piastrelle quadrate di 5 cm di lato. Le piastrelle sono alcune blu e alcune azzurre, in numero non uguale. Tutte le piastrelle di uno stesso colore formano un rettangolo centrale, le altre una bordatura di larghezza costante intorno al rettangolo. Tutte le piastrelle sono intere e il fondo deve essere interamente coperto. Sapendo che utilizzando lo stesso numero di piastrelle si possono mettere quelle blu al centro e quelle azzurre all'esterno e viceversa, determinare l'area del fondo della piscina (in cm^2). [2800, 40 punti]

19. Il rettangolo $ABCD$ è tale che se si piega lungo la sua diagonale AC si ottiene un triangolo BEC la cui area è $\frac{1}{6}$ dell'area del rettangolo. Determinare l'ampiezza dell'angolo $\hat{A}CD$ in gradi. [30, 40 punti]

20. Poniamo

$$f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x),$$

dove $k = 1, 2, \dots$ e x è un qualsiasi numero reale. Calcola il valore del reciproco di $f_4(2) - f_6(2)$. [12, 40 punti]

21. Un poligono regolare di vertici A_1, A_2, \dots, A_{31} è inscritto in un cerchio di centro O e raggio 13. Sia P un punto qualsiasi della circonferenza di centro O e raggio 7. Quanto vale

$$|A_1P|^2 + |A_2P|^2 + \dots + |A_{31}P|^2 ?$$

[6758, 70 punti]

22. Sia ABC un triangolo scaleno e sia D un punto interno a esso. Supponiamo di sapere che $\hat{A}DB = \hat{A}CB + 90^\circ$ e che $|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|$. Quanto vale

$$\left(\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|} \right)^6 ?$$

[8, 70 punti]

23. È dato un poligono convesso di 2011 lati con 314 punti al suo interno. Congiungiamo vertici e punti in modo da tagliare il poligono in triangoli disgiunti i cui vertici coincidono con uno dei $2011 + 314$ punti già assegnati. Quanti sono questi triangoli? [2637, 70 punti]