

S-disfida One

Venerdì 17 dicembre 2010

Problema 1 (20 punti). Nel registrare le dichiarazioni dei tre imputati ad un processo, il cancelliere è stato piuttosto trascurato, e dal verbale risulta quanto segue:

Carlo: il colpevole è ...ario.

Dario: il colpevole è Dario.

Mario: il colpevole è ...ario.

Sapendo che il colpevole ha mentito e almeno uno degli innocenti ha detto la verità, che cosa si può concludere?

0001 Il colpevole è Dario

0002 non si può determinare il colpevole

0003 Carlo ha accusato Dario

0004 Mario ha accusato Dario

0005 Mario ha accusato Mario.

0004

Problema 2 (20 punti). Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti i cavalieri dicono sempre la verità ed i furfanti mentono sempre. Supponi di incontrarvi Andrea che dice: *Bruno afferma che Carlo è un furfante, ma Carlo afferma che Diego è un furfante e Diego afferma che Bruno è un furfante.* Che cosa puoi dedurre?

0001 Bruno, Carlo e Diego sono tutti furfanti

0002 Bruno, Carlo e Diego sono tutti cavalieri

0003 tra Bruno, Carlo e Diego ci sono due furfanti e un cavaliere

0004 tra Bruno, Carlo e Diego ci sono due cavalieri e un furfante

0005 Andrea è un furfante.

0005

Problema 3 (20 punti). Qual è il più piccolo numero naturale non primo e maggiore di 20, non divisibile per i numeri primi minori di 20? 0529

Problema 4 (20 punti). Trovare il più piccolo numero naturale n tale che:

$$n^{213} > 7^{426}.$$

0050

Problema 5 (20 punti). Una scatola contiene 6 monete truccate e 4 normali. Quando si lancia una moneta normale, si ottiene testa con una probabilità di $\frac{1}{2}$, mentre per una moneta truccata si ottiene testa con una probabilità di $\frac{4}{5}$. Si estrae casualmente una moneta dalla scatola e la si lancia. Qual è la probabilità che si ottenga testa? Si indichi come risposta il numero che si ottiene sommando numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che rappresenta la probabilità richiesta. 0042

Problema 6 (40 punti). Sette persone stanno guardando uno spettacolo teatrale, seduti in una fila che contiene proprio sette sedie. Dopo l'intervallo tornano a sedersi nella stessa fila, ma scelgono i posti casualmente. Qual è la probabilità che nessuna delle due persone sedute all'estremità della fila fosse precedentemente seduta all'estremità della fila? Si indichi come risposta il numero che si ottiene sommando numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che rappresenta la probabilità richiesta. 0031

Problema 7 (40 punti). Risolvi il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv -5 & (\text{mod } 19) \\ x \equiv 11 & (\text{mod } 12) \\ x \equiv 3 & (\text{mod } 8) \\ 3x \equiv 1 & (\text{mod } 7). \end{cases}$$

Qual è la più grande soluzione minore di 10 000? 9875

Problema 8 (40? punti). Si dica qual è il massimo numero di sfere di raggio $r = 1\text{ cm}$ che si possono inserire in un contenitore cilindrico di raggio $R = 2\text{ cm}$ e di altezza $h = 20\text{ cm}$, in modo da consentirne la chiusura. 0026

Problema 9 (40? punti). Un cerchio di raggio ℓ si muove all'interno di un triangolo rettangolo avente lati di lunghezza $5\ell, 12\ell, 13\ell$, in modo da toccare sempre almeno uno dei suoi lati. Quanto è lungo il percorso descritto dal centro del cerchio dopo essere tornato alla posizione di partenza? 0015

Problema 10 (40 punti). Determinare l'area massima di un triangolo avente perimetro $8\sqrt[4]{27}$. 0016

Problema 11 (40 punti). Sul lato AB di un triangolo equilatero di lato 1200 si prenda un punto D ; da esso si mandino le perpendicolari ai lati BC e AC e si indichino con E ed F i loro piedi. Da questi ultimi due punti si mandino le perpendicolari ad AB e siano G e H i piedi. Trovare la minima lunghezza di EF . 0900

Problema 12 (40 punti). Supponiamo di avere dei mattoncini tipo i Lego® (base quadrata giusto per fissare le idee). Sfortunatamente abbiamo a disposizione solo due tipi di mattoncini: i primi (in numero a piacere) di 8 cm d'altezza, gli altri (anche questi in numero a piacere) di altezza 11 cm. Incastrandoli uno sopra l'altro si possono formare torri di diverse altezze. La

domanda è questa: quale è la misura della torre più alta fra quelle che non si possono in alcun modo costruire con i mattoni a disposizione? (Naturalmente se quest'altezza esiste finita, se cioè non ci si trovi nel caso di altezze arbitrariamente grandi non raggiungibili esattamente). 0069

Problema 13 (40 punti). Stabilire quante sono le possibili coppie di numeri interi (x, y) tali che $x^3 + y^3 = 91$. 0004

Problema 14 (40 punti). Data una parabola si considerino le intersezioni A e B della retta passante per il fuoco e parallela alla direttrice e il punto C d'intersezione tra le due tangenti alla parabola nei punti A e B . Sapendo che la distanza del fuoco dal punto A vale 12 metri, si determini l'area (in metri quadri) della superficie del triangolo ABC . 0144

Problema 15 (40 punti). In un'ora una stiratrice professionista riesce a stirare 8 capi tra Camicie, Pantaloni e Giacche. Supponiamo che ogni capo richieda lo stesso tempo di stiratura e che in una lavanderia ci siano tre stiratrici di uguale velocità (8 capi all'ora). Il proprietario ha lavato 8 Camicie, 8 Pantaloni e 8 Giacche mescolandoli a caso e darà 8 capi a ciascuna stiratrice. Quante sequenze diverse di otto capi possono passare per le mani della terza stiratrice? Capi dello stesso tipo sono da considerarsi indistinguibili. 6561

Problema 16 (40 punti). La professoressa di storia ha l'abitudine di sorteggiare l'interrogato tra i suoi 26 alunni aprendo a caso il proprio libro di testo, che ha 320 pagine, e calcolando la somma delle cifre del numero di pagina modulo 26. Sapendo che, per maggior equità, la professoressa estrae soltanto i numeri di pagina pari, si calcolino la probabilità che esca l'alunno associato al numero 8 e la probabilità che esca quello associato al numero 7 esprimendole in forma di frazioni ridotte ai minimi termini. Qual è la somma dei numeratori delle due frazioni? 0010

Problema 17 (40 punti). Determinare quante sono le terne di numeri interi positivi (x, y, z) con la condizione che $0 < x \leq y \leq z$, che soddisfano la relazione: $xy + yz + xz - xyz = 2$. 0002

Problema 18 (70 punti). Un normale dado a sei facce viene lanciato otto volte. Si sa che il numero 3 è stato ottenuto 3 volte. Qual è la probabilità che questo risultato sia stato ottenuto senza che il numero 3 risultasse in due lanci consecutivi? Si indichi come risposta il numero che si ottiene sommando numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che rappresenta la probabilità richiesta. 0019

Problema 19 (70 punti). Un grafo ha 1982 vertici. Comunque dati 4 vertici ce ne è almeno uno connesso con gli altri tre. Quale è il minimo numero di vertici che è connesso con 1981 vertici? 1979

Problema 20 (70 punti). Tre vertici di un 27-gono regolare sono scelti a caso. Determinare la probabilità che il centro del poligono giaccia all'interno del triangolo risultante. Si indichi come risposta il numero che si ottiene sommando numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che rappresenta la probabilità richiesta. 0067

Problema 21 (70 punti). Un pentagono è tale che ogni triangolo formato da tre vertici adiacenti ha area 1. Determinarne l'area. Si indichi come risposta il numero costituito dalle prime quattro cifre (anche decimali) della risposta. 3618