

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\sqrt{6} = 2,4495$ $\pi = 3,1416$

12 febbraio 2010

Gara a Squadre - Allenamento Disfida - Testi

1. Sette cifre [20 punti]

Quanti sono i numeri naturali che in base 10 si scrivono con 3 cifre e in base 2 si scrivono con 7 cifre?

2. Il cubo [20 punti]

Dato un cubo C , quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di C e che non giacciono su nessuna delle facce di C ?

3. Piccioni viaggiatori [20 punti]

Delle gabbie sono occupate da 100 piccioni, ciascuna gabbia contiene almeno un piccione e tutte ne contengono un numero diverso. Quante sono, al più, le gabbie?

4. Quante cifre [30 punti]

Quante cifre ha il numero $(123456789)^6$?

5. Commercio [30 punti]

A seguito di un piccolo incidente durante il trasporto, un commerciante di stoffe ha perso una piccola percentuale dei 1000 rotoli di una partita da cui avrebbe ricavato 10000 euro, per compensare la perdita il commerciante ha aumentato il prezzo dei rotoli della stessa percentuale. Dopo aver venduto tutta la partita scopre che il ricavo effettivo è solo di 9951 euro. Quanti rotoli sono andati perduti nell'incidente?

6. La strana funzione [40 punti]

Una funzione f definita sui razionali è tale che:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0; & f(1) &= 1; \\ f(x) &= f(2x)/4, & \text{se } 0 < x < 1/2; \\ f(x) &= 3/4 + f(2x - 1)/4, & \text{se } 1/2 \leq x < 1. \end{aligned}$$

Trovare le prime 4 cifre decimali di $f(0,625)$.

7. Il libro [40 punti]

Un libro ha x pagine che sono state numerate utilizzando 2010 caratteri composti dalle cifre decimali. Determinare x .

8. Il logo [40 punti]

Sulla porta dello studio di un noto ipnotista appare un logo costituito da un quadrato nel quale è inscritto un cerchio nel quale è inscritto un quadrato nel quale è inscritto un cerchio e così via. In totale nel logo compaiono 15 quadrati il più piccolo dei quali ha lato 1mm. Determinare quanti millimetri misura il lato del più grande.

9. Il lungo numero [40 punti]

Il numero N consiste in 1999 cifre tali che, se ogni coppia di cifre consecutive di N fosse vista come un numero di due cifre, allora quel numero sarebbe o un multiplo di 17 o un multiplo di 23. La somma delle cifre di N è 9599. Quali sono le ultime 4 cifre di N ?

10. I quadrati alterni [40 punti]

Qual è il valore dell'espressione $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$?

11. Due quadrati [40 punti]

I numeri a e b sono interi positivi. Qual è il minimo valore non nullo di $a + b$ affinché $21ab^2$ e $15ab$ siano entrambi quadrati perfetti?

12. Gara di skateboard [40 punti]

In una gara di skateboard i concorrenti sono valutati da 8 giudici ciascuno dei quali esprime un voto da 0 a 9 (estremi compresi). A questo punto si scartano il voto più alto e il voto più basso (solo una volta cadauno anche se c'è più di un voto massimo o minimo), e la somma dei punteggi rimanenti è il punteggio dell'atleta. Al termine della prestazione di Paolo l'altoparlante annuncia: "I giudici hanno assegnato a Paolo punteggi tutti diversi, il totale dei punti è 23 e i punteggi dei singoli giudici sono stati 5, 3, 2, 8,". A questo punto l'altoparlante smette di funzionare e non si sentono le valutazioni assegnate dai rimanenti 4 giudici. Scrivere da sinistra a destra in ordine crescente i punteggi mancanti.

13. La tavola rotonda [40 punti]

Il numero di membri del Gran Consiglio di Camelot è primo. Alcuni sono leali e dicono sempre la verità, gli altri sono corrotti e dicono sempre il falso. Ad ogni adunanza si siedono sempre nello stesso ordine attorno alla tavola rotonda. Alla domanda: "*accanto a te c'è seduto sia un consigliere leale che un consigliere corrotto?*" tutti rispondono **sì** con l'eccezione di Artù e di Lancillotto, che sono seduti fianco a fianco e che rispondono **no**. Merlino ha scoperto che ci sono esattamente 111 consiglieri corrotti. Quanti sono in tutto i membri del Gran Consiglio?

14. Il percorso della formica **[50 punti]**

Una formica si sposta di un centimetro in direzione est-ovest, poi di due centimetri in direzione nord-sud, poi di tre centimetri nuovamente in direzione est-ovest e così via. Dopo aver percorso in questo modo un certo numero pari n di tratti si ritrova al punto di partenza. Qual è il valore massimo di n sapendo che $n < 1988$? (Si veda anche il problema “Il percorso dell’ape”).

15. Le quattro osterie **[50 punti]**

In un Paese ci sono quattro osterie A, B, C, D tali che A sia collegata da una strada a B e C , B e C siano collegate a tutte le altre e D sia collegata a C e B . Un ubriacone inizia a fare il giro delle osterie partendo dall’osteria A e passa, dopo avere bevuto ad una qualsiasi delle osterie raggiungibili direttamente con la stessa probabilità. Qual è la probabilità che l’ubriacone si trovi all’osteria C alla quinta bevuta?

Esprimere la soluzione come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

16. L’asteroide **[50 punti]**

L’asteroide minerario Ottapira ha la forma geometrica di un ottaedro regolare di spigolo 1000 metri con l’aggiunta di otto piramidi triangolari con base coincidente con ciascuna delle facce dell’ottaedro. Le facce laterali delle piramidi sono triangoli rettangoli isosceli con l’angolo retto nel vertice della piramide. In questo modo l’asteroide risulta composto da 24 facce triangolari congruenti. Il polo Nord e il polo Sud coincidono con i vertici di due piramidi opposte e devono essere congiunti da una strada che percorre la superficie dell’asteroide. Quanto deve essere lunga come minimo tale strada?

17. Il regno di Tropoli **[50 punti]**

Il regno di Tropoli consiste di quattro stelle vicine. Esse formano una costellazione che viene vista in modo diverso dai vari punti dello spazio lontano. Dal pianeta Alfa formano i vertici di un quadrato, dal pianeta Beta si vede un triangolo equilatero e il suo baricentro, da Gamma si vede un triangolo isoscele con base $\sqrt{2}$ volte l’altezza, due delle quattro stelle risultano sovrapposte e costituiscono il vertice del triangolo isoscele. Dalla Terra tre delle quattro stelle sono vertici di un triangolo ABC la cui base BC è divisa a metà dalla quarta stella. Quant’è l’altezza di quest’ultimo triangolo assumendo che la base valga 1000?

18. Il superpoligono **[50 punti]**

Preso un generico 2010-agono, consideriamo 1005 punti dentro di esso. Tagliamo il poligono in triangoli che abbiano come vertici questi 3015 punti e tali che non si intersechino tra loro. In quanti triangoli distinti ho tagliato il poligono?

19. Le tre altezze **[60 punti]**

Le tre altezze di un triangolo misurano 728, 780 e 840. Quanto vale il suo perimetro?

20. Il percorso dell'ape **[60 punti]**

Un'ape vola lungo una poligonale chiusa nello spazio con lati di lunghezza $1, 2, \dots, n$ (in questo esatto ordine) e tali che ogni tre lati consecutivi siano mutuamente ortogonali. Qual è il massimo valore di n minore di 2010? (Si veda anche il problema "Il percorso della formica").

21. Ascensori quantistici **[60 punti]**

Un ascensore quantistico permette di salire o scendere di un dislivello pari al numero razionale p/q con p, q numeri interi positivi, in un tempo pari alla somma $p + q$, il tutto misurato in opportune unità fisiche. Qual è il più piccolo dislivello non nullo che è possibile superare in non più di 20 unità di tempo anche utilizzando più ascensori? Scrivete il denominatore della frazione risultante ridotta ai minimi termini.

22. Strani legami **[60 punti]**

I numeri reali a, b, x, y sono legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}a + b &= 23, \\ax + by &= 79, \\ax^2 + by^2 &= 217, \\ax^3 + by^3 &= 691.\end{aligned}$$

Quanto vale $ax^4 + by^4$?

23. La stazione spaziale **[70 punti]**

La stazione spaziale di Doughnut è un solido di rotazione ottenuto ruotando rispetto all'asse y l'insieme $\{(x, y) : (x - 3/2)^2 + y^2 \leq 9 \leq (x + 3/2)^2 + y^2\}$ (c'è quindi una parte vuota interna a forma di sigaro).

Qual è il volume della stazione spaziale?

24. Gioco dei ciottoli **[80 punti]**

Hal e Dave stanno giocando con dei mucchi di sassi secondo queste regole: a turno un giocatore sceglie uno dei mucchi e toglie da lì un numero di sassi compreso tra 1 e 9. Vince chi prende l'ultimo sasso lasciando l'avversario senza possibilità di muovere. Ad un certo punto del gioco sono rimasti tre mucchi, il primo con un solo sasso, il secondo con 4 sassi ed il terzo con 18 sassi. Puoi aiutare Hal a fare la sua mossa?

Scrivi 0000 se non ci sono mosse vincenti (cioè se Hal perde qualunque mossa faccia, visto che Dave gioca al meglio); scrivi 00ab se c'è una unica mossa vincente che consiste nel togliere b sassi dal mucchio a ($1 \leq a \leq 3$); scrivi $abcd$ con $ab < cd$ se ci sono due mosse vincenti: togliere b sassi dal mucchio a oppure togliere d sassi da mucchio c ; scrivi 9999 se ci sono più di due mosse vincenti.