

Geometria tra le pieghe

Università Cattolica di Brescia

15 gennaio 2010

Lucia Gecchelin
Francesco Decio



L'arte del piegare la carta

ORIGAMI

ori piegare
kami carta

折紙

- uno o più fogli di carta quadrati (o forma convessa)
- *solo* uso della piegatura
- NO colla
- NO tagli



Akira Yoshizawa

Grandi maestri giapponesi e origamisti occidentali fanno dell'origami una *forma d'arte*.



Il 98% dei modelli originali sono stati inventati negli ultimi 50 anni della storia dell'origami!

Numerose Associazioni Internazionali.

Centro Diffusione Origami
www.origami-cdo.it





© Dinh T. Giang 2006



© Dinh T. Giang 2005



Dinh T. Giang

QUADRATO

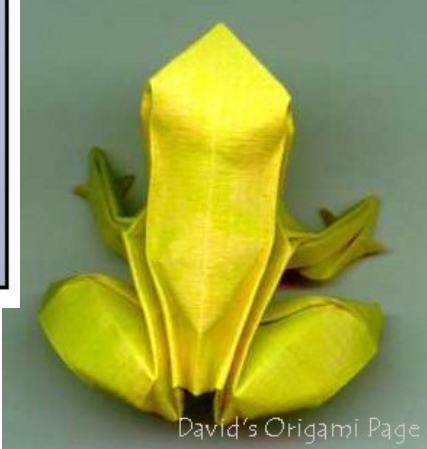
Roman Diaz



Eric Joisel



Robert J. Lang



David Derudas

Origami e Matematica

- *Matematica dell'origami*: la matematica che descrive le leggi soggiacenti all'origami
- *Origami computazionale*: l'insieme degli algoritmi e la teoria rivolti alla soluzione di problemi origami, attraverso la matematica
- *Tecnologia origami*: l'applicazione della piegatura per risolvere problemi che sorgono in ingegneria, nel disegno industriale e nella tecnologia in generale (airbag, lenti di telescopi, bicchieri, piegatura delle carte geografiche, ...)



- **1989** Ferrara, **Italia** *The First International Meeting of Origami Science and Technology*
- **1994** Otsu, **Giappone** *The Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*
- **2001** Asilomar, California, **USA** *The Third International Meeting of Origami Science, Math, and Education*
- **2006** Pasadena, California, **USA** *The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*



Crease pattern

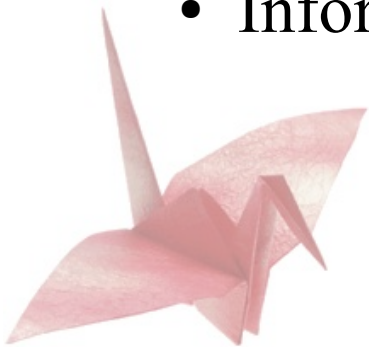
L'insieme delle tracce delle pieghe lasciate sul foglio di un modello dispiegato

Crease pattern

- Informazioni sulla struttura
- Visione d'insieme dell'intero modello

Diagrammi

- Illustrano la sequenza di piegatura passo dopo passo
- Informazioni locali



Dato un foglio di carta e un insieme di linee disegnate su di esso, si può dire se questo costituisce il crease pattern per un modello origami?

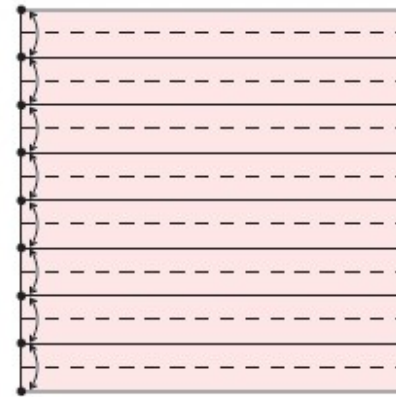
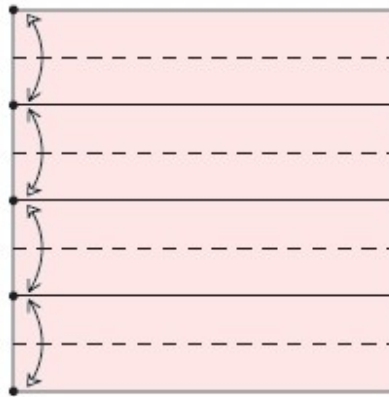
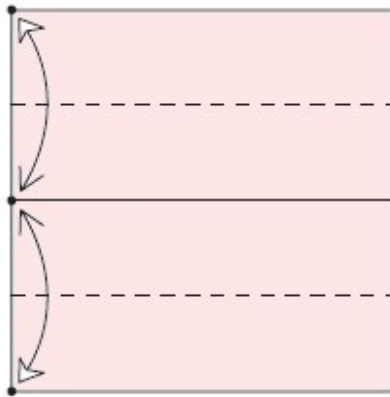
Problema assai difficile, in generale senza soluzione.

Alcuni risultati locali per gli origami piatti condizioni necessarie e sufficienti sulle pieghe che convergono in un vertice di un **origami piatto**.



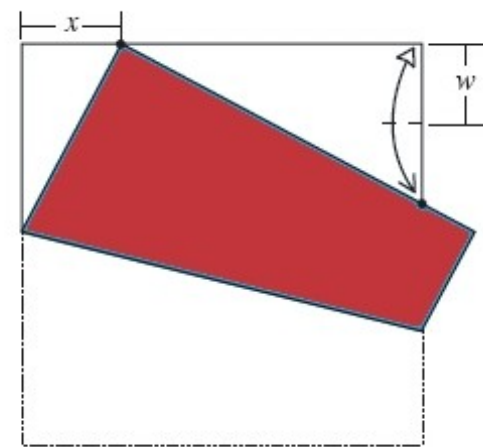
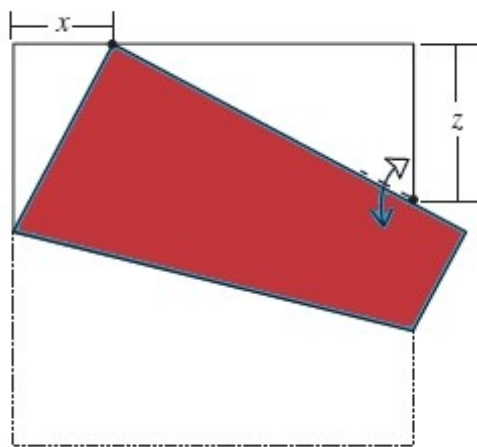
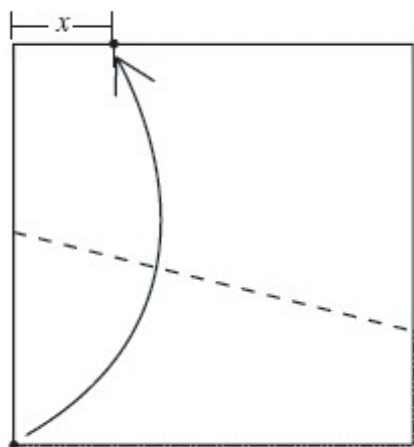
La suddivisione del foglio

Semplice la suddivisione in potenze di 2



...La suddivisione del foglio

Teorema di Haga



$$z = \frac{2x}{1+x}$$

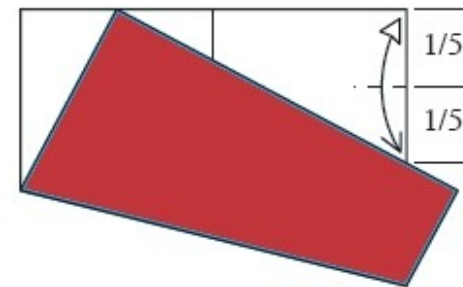
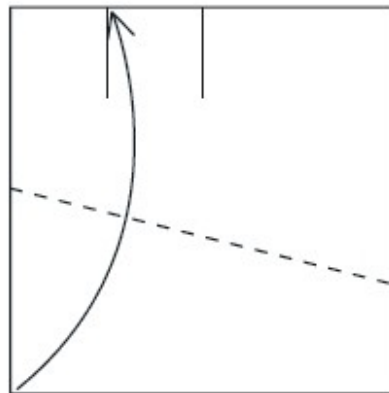
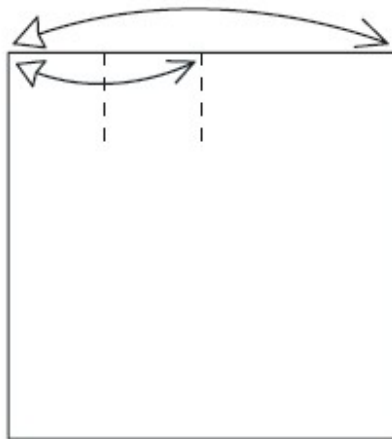
$$w = \frac{x}{1+x}$$



...La suddivisione del foglio

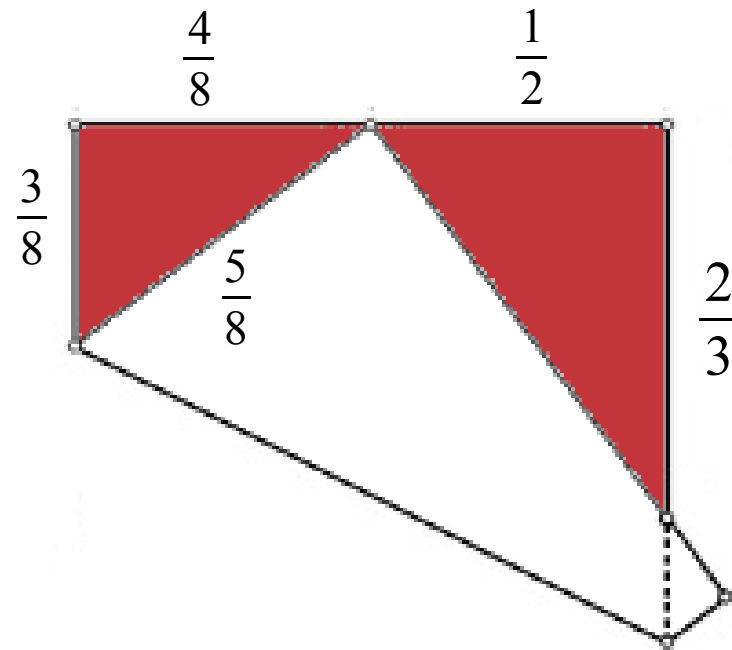
Teorema di Haga:

- suddivisione in 3, $x = 1/2$
- suddivisione in 5, $x = 1/4$



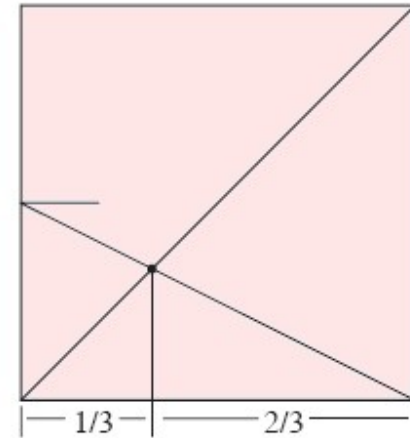
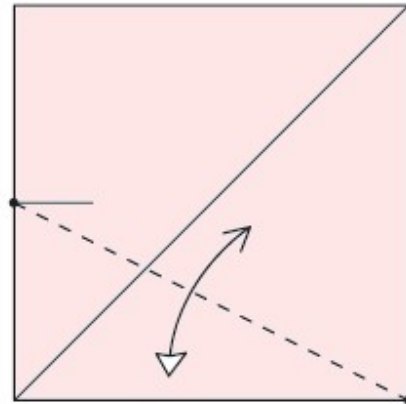
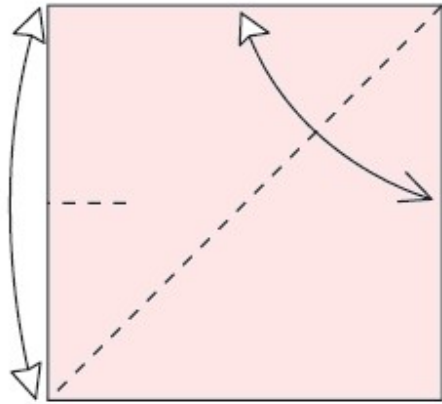
Una terna pitagorica!

3 : 4 : 5

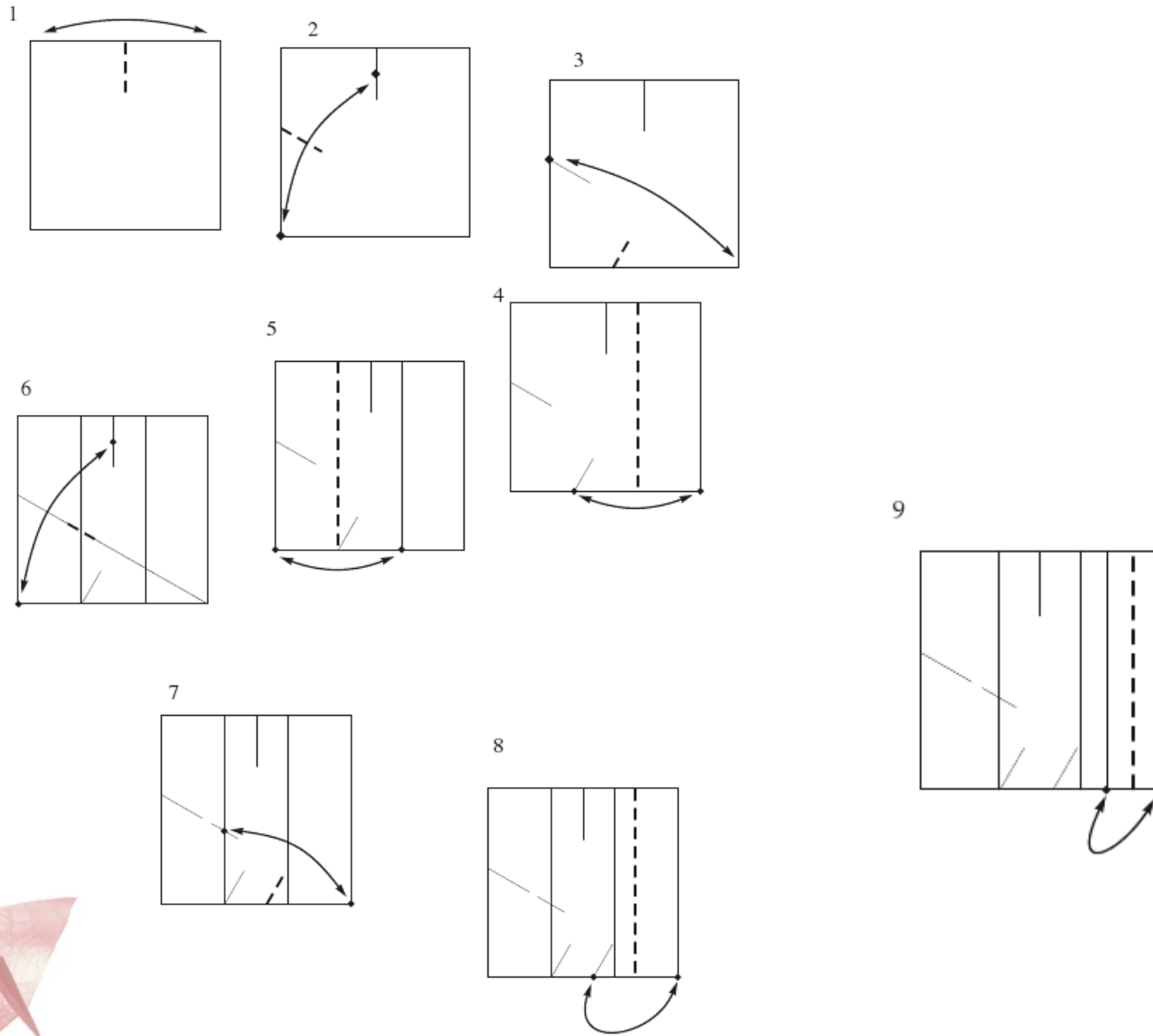


...La suddivisione del foglio

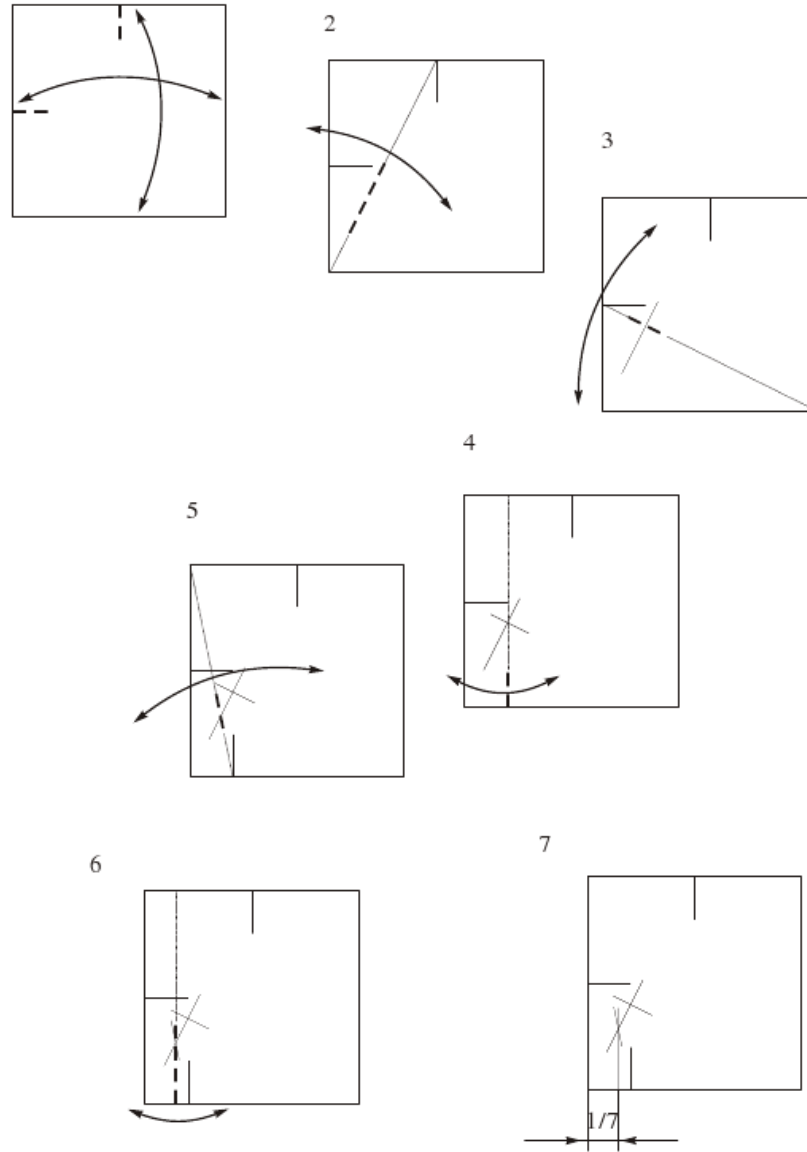
Un *altro* metodo per dividere un lato del quadrato in 3 parti



DIVISIONE in 9 di F. Decio



DIVISIONE in 7 di F. Decio



TASSELLAZIONI

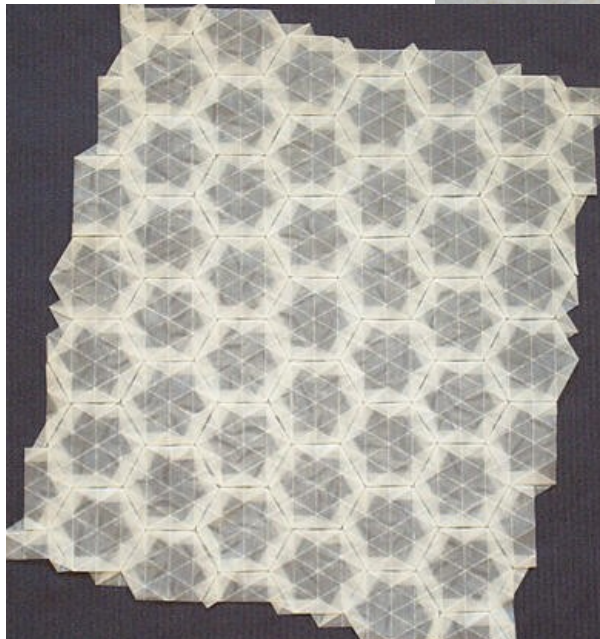


Momotani

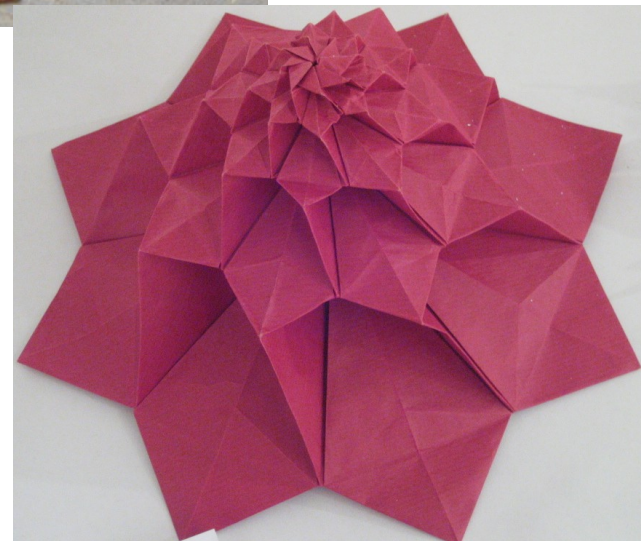
Gjerde



Fujimoto



Konrad



Palmer

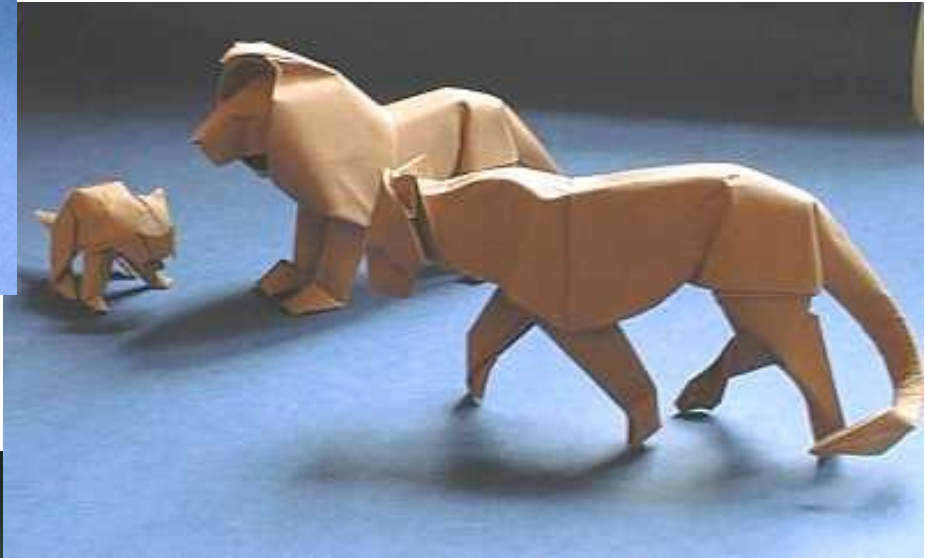
Perché il quadrato

- Forma semplice
- Grande simmetria
 - Il cerchio ha la massima simmetria, ma in origami è meno utilizzabile di quella del quadrato, poiché la natura delle pieghe sulla carta è rettilinea.
- Dà vita alla base della GRU
- Sempre le stesse proporzioni
 - Il foglio quadrato tanto frequente nell'origami è invece raro nell'uso quotidiano della carta, dove predomina il rettangolo. Nella maggior parte delle nazioni il formato standard è A.





David Brill, **TRIANGOLI**



Roman Chevrier, **ESAGONO**

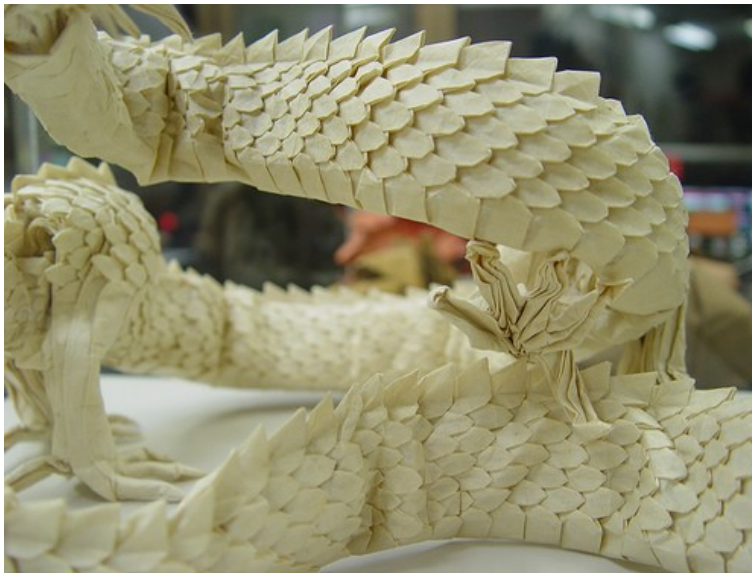
RETTANGOLI



D. Derudas



Hulme



S. Kamiya (da un foglio quadrato!)

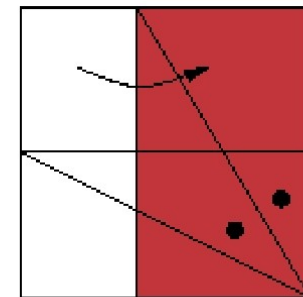
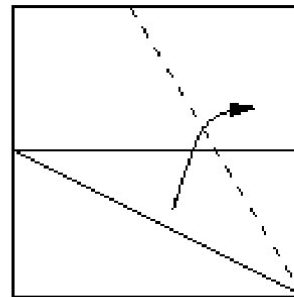
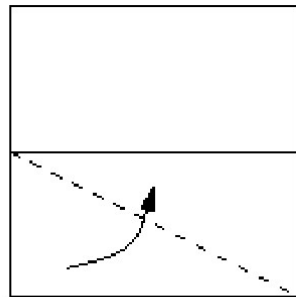
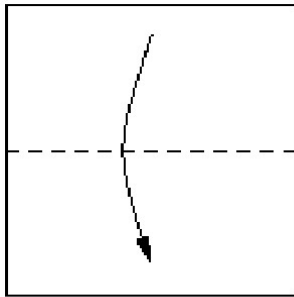


R. J. Lang

Rettangolo aureo

Lati in proporzione aurea $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

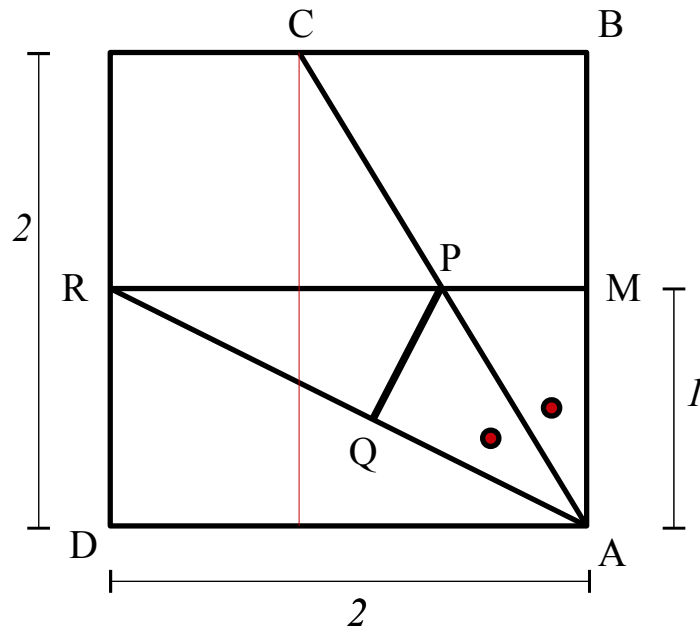
Come ottenere un rettangolo aureo da un quadrato



Ricavando un quadrato da un rettangolo aureo,
si ottiene un nuovo rettangolo aureo!



...Rettangolo aureo



- Teorema di Pitagora: $\overline{AR} = \sqrt{5}$
- $\Delta APQ \cong \Delta APM \Rightarrow \overline{AQ} = \overline{AM} = 1$
 $\Rightarrow \overline{QR} = \sqrt{5} - 1$
- $\Delta ADR \sim \Delta RPQ \Rightarrow \overline{PQ} : \overline{DR} = \overline{RQ} : \overline{AD} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \overline{PQ} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$
- $\Delta APQ \cong \Delta APM \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{PM}$
- $\Delta ABC \sim \Delta APM \Rightarrow \overline{CB} = 2 \cdot \overline{PM} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$$

□



Coniglietti aurei con orecchie d'argento!



Una coppia di questi coniglietti si piega a partire da un rettangolo aureo. Possono rappresentare la prima coppia della successione di Fibonacci!

Supponiamo che una coppia di conigli di un mese sia troppo giovane per riprodursi, ma sia sufficientemente matura per riprodursi all'età di due mesi. Supponiamo inoltre che ogni mese, a partire dal secondo, i conigli producano una nuova coppia. Se ciascuna coppia di conigli si riproduce nel modo appena descritto, quante coppie di conigli si avranno all'inizio di ciascun mese?

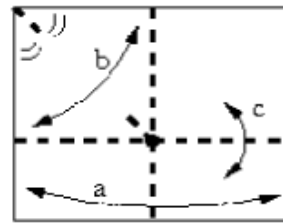
La risposta è data dalla “successione di Fibonacci”: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., F_n , ..., dove

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = F_1 = 1$$

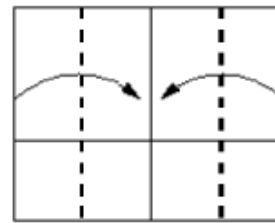
$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



Coniglietti aurei



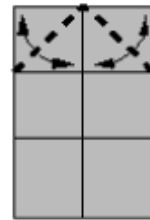
1) parti da mezzo
rettangolo aureo



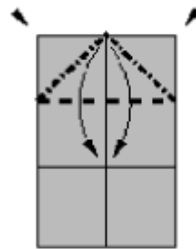
2)



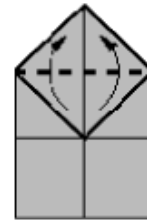
3)



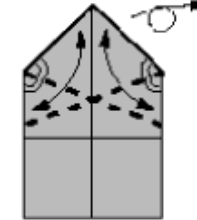
4)



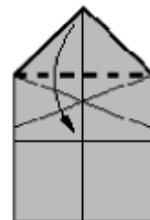
5)



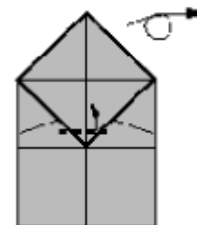
5)



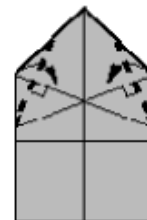
7) bisettrice!



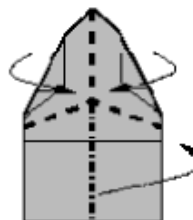
8)



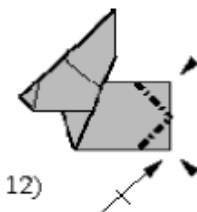
9)



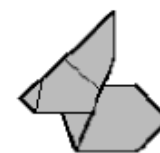
10)



11)



12)



...Coniglietti aurei con orecchie d'argento!

Il **numero aureo** come frazione continua

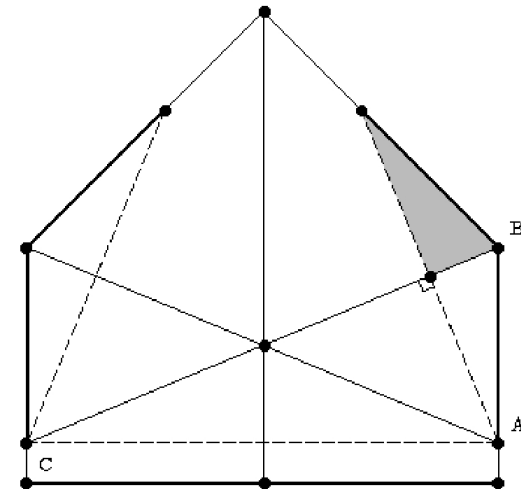
$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = [\bar{1}] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Il **numero d'argento** come frazione continua

$$\sqrt{2}+1 = [\bar{2}] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Il **numero d'argento** nell'orecchio del coniglio

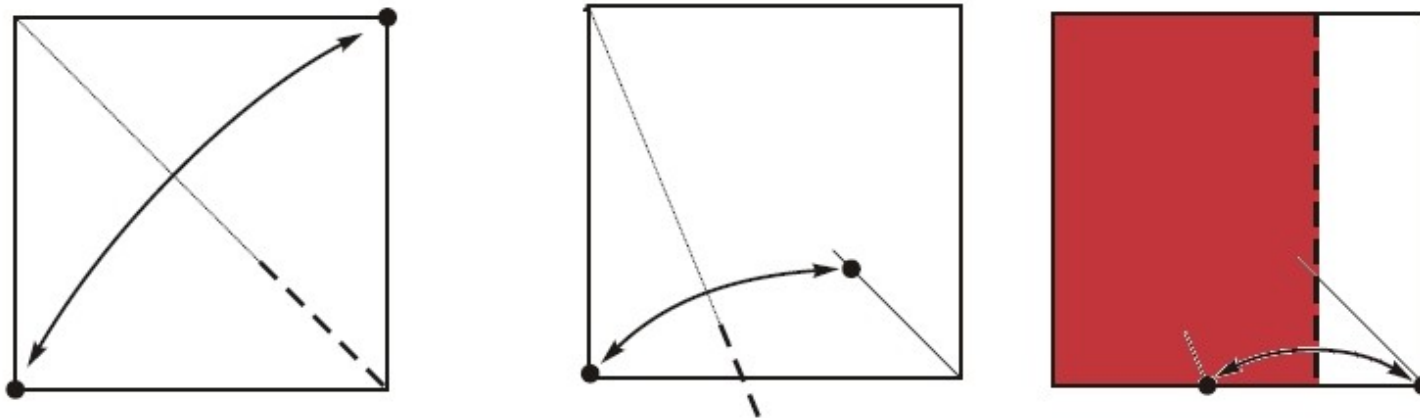
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cotg \frac{\Pi}{8} = \sqrt{2}+1$$



Rettangolo d'argento

Lati in proporzione d'argento $1:\sqrt{2}$

Come ottenere un rettangolo d'argento da un quadrato



Dividendo a metà un rettangolo d'argento
si ottiene un altro rettangolo d'argento!



Origami Modulare

Più fogli di carta, ciascuno piegato in un *modulo*,
assemblati in una figura piana o tridimensionale.

Il modello sta insieme grazie a

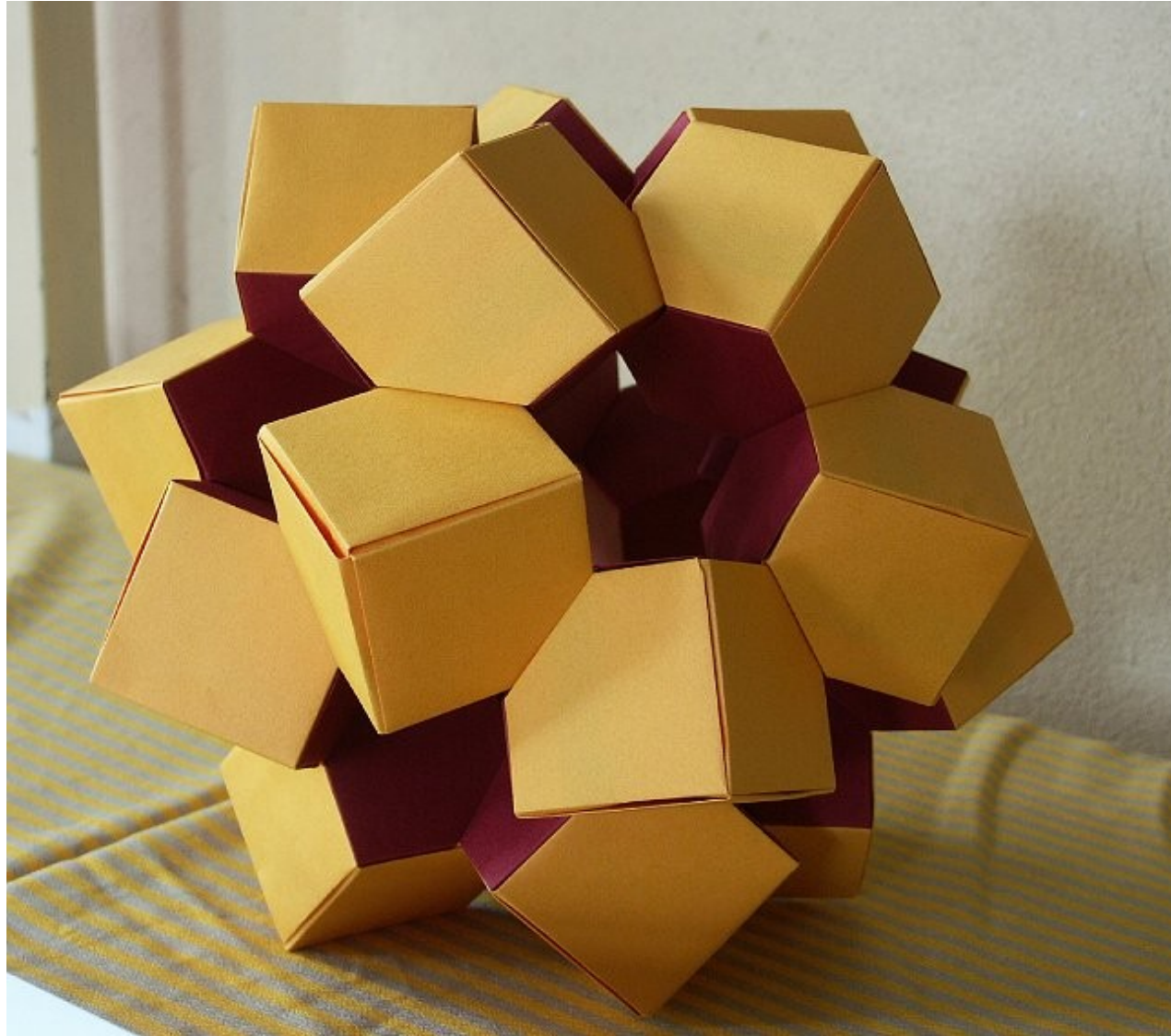
- incastrati
 - le alette dei moduli nelle tasche di altri moduli
 - moduli “giunto” che si incastrano tra i moduli “principali”
- tensione
- aderenza tra i fogli





Francesco Decio

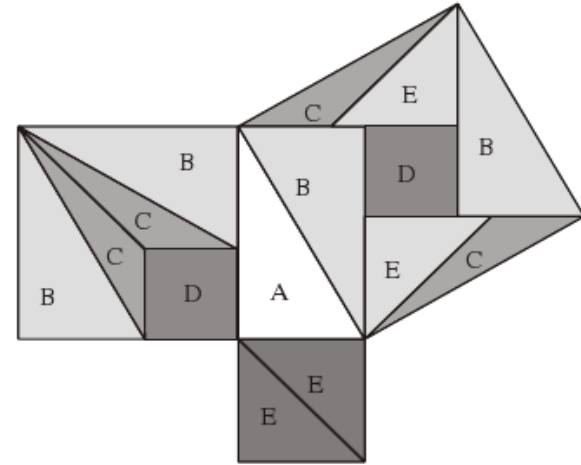
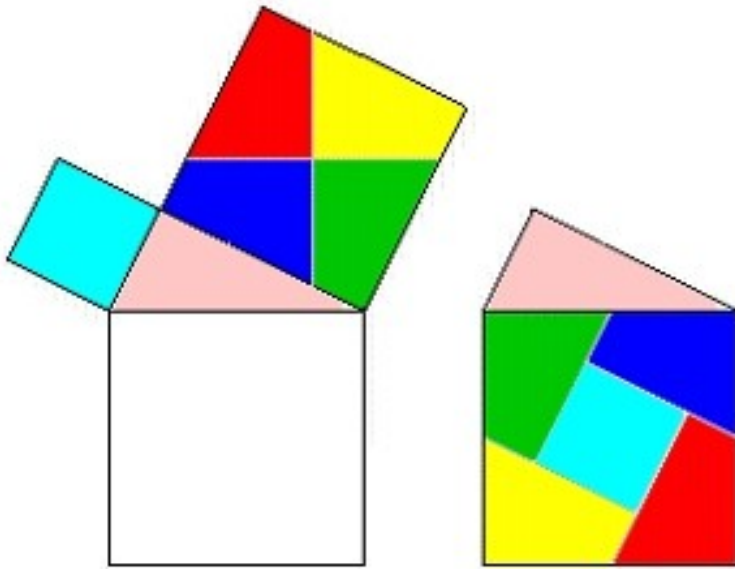
167 moduli = 6 x 24 cubi + 23 giunti



Francesco Decio

150 moduli = 6 x 20 cubi + 30 giunti

Pitagora e le dissezioni



DISSEZIONE decomporre un poligono in un numero finito di pezzi (poligoni) e riassemblarli per formare un altro poligono di ugual area.

Teorema di *Bolyai-Gerwien*

Se due poligoni hanno la stessa area, allora sono equidecomponibili.

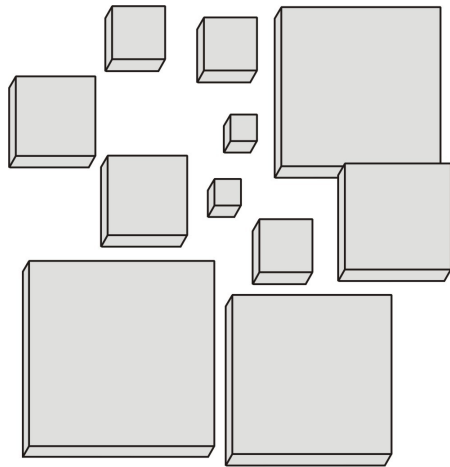


...Dissezioni

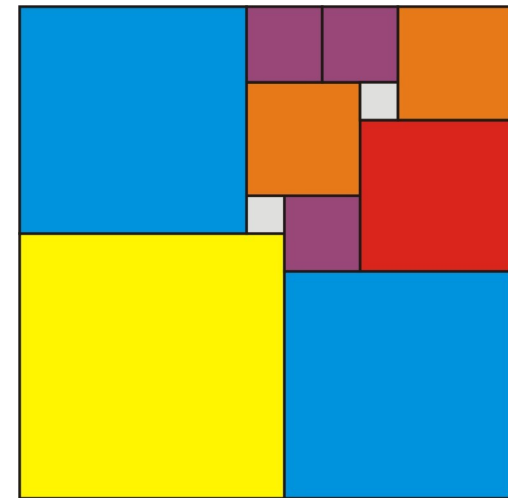
Quadrato di quadrati

Puzzle di Henry Ernest Dudeney (1847 - 1930)

Libero adattamento origami di Francesco Decio



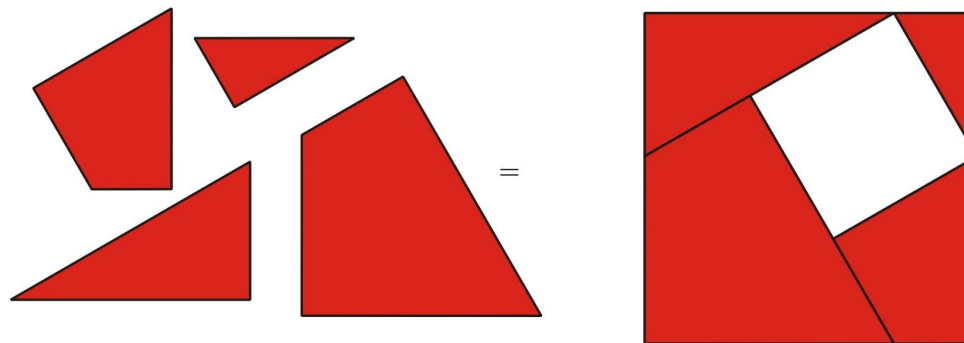
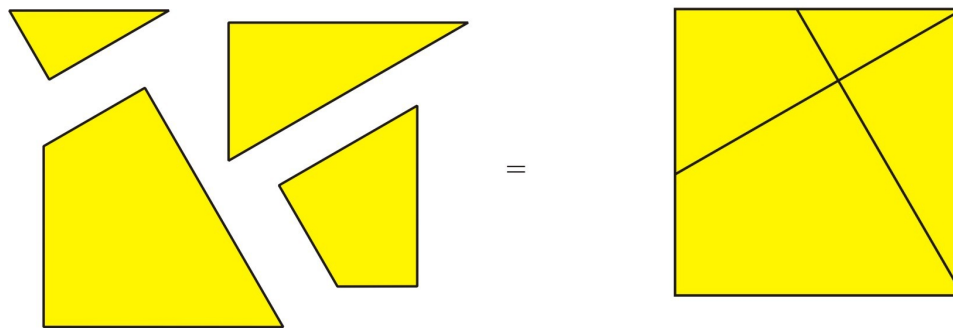
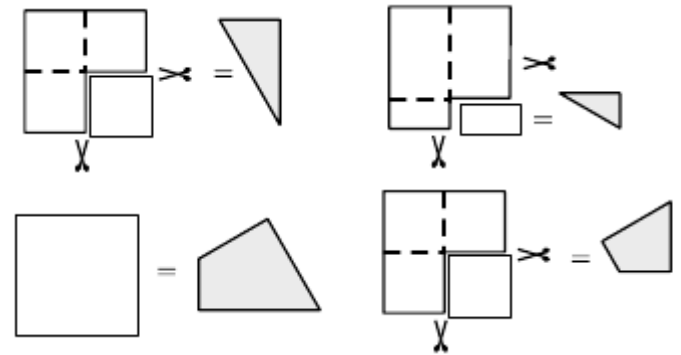
? =



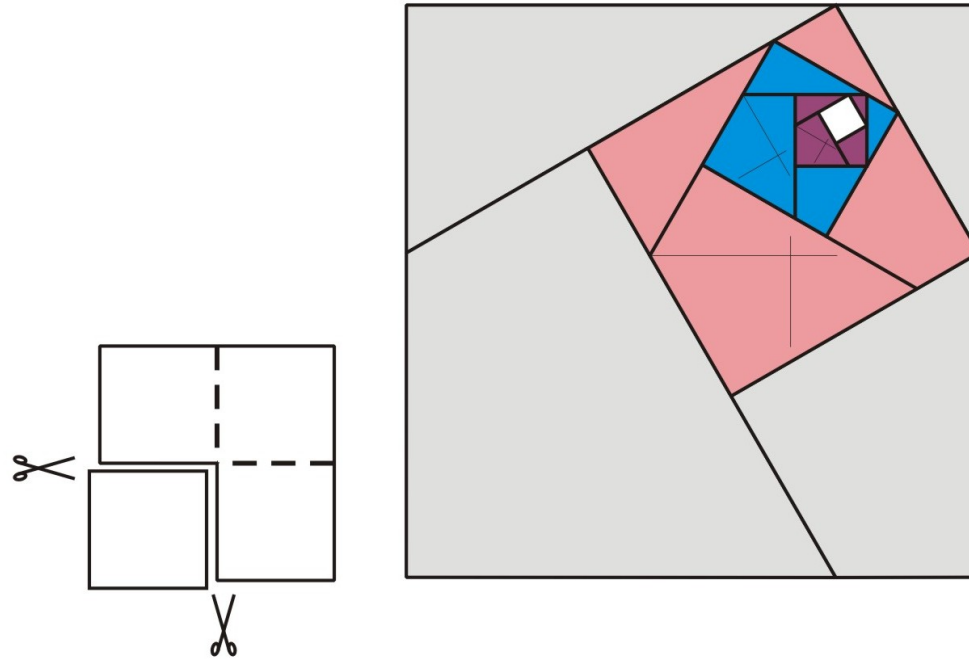
...Dissezioni

Una dissezione del quadrato

Da un'idea di H. Perigal (1801 – 1899)
tratta da “Dissections Plane and Fancy” di
G. N. Frederickson, Cambridge University Press, 1997
Libero adattamento origami di Francesco Decio



...dissezione di Perigal



Piegando un altro puzzle, seguendo le stesse istruzioni, ma partendo da un foglio di dimensioni pari a $\frac{1}{4}$ del foglio di partenza, è possibile riempire il quadrato vuoto! A sua volta, questo secondo quadrato vuoto può essere riempito allo stesso modo.



...Dissezioni

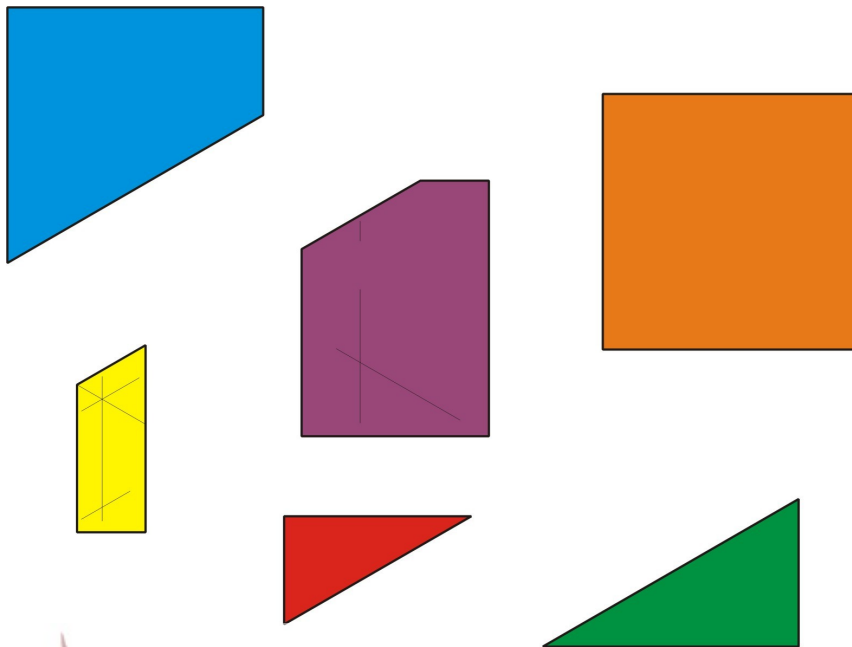
Un'altra dissezione del quadrato

Da un'idea di H. Perigal (1801 – 1899)

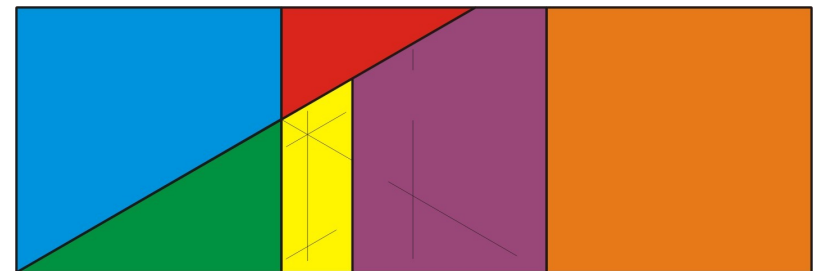
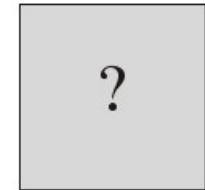
tratta da “Dissections Plane and Fancy” di

G. N. Frederickson, Cambridge University Press, 1997

Libero adattamento origami di Francesco Decio

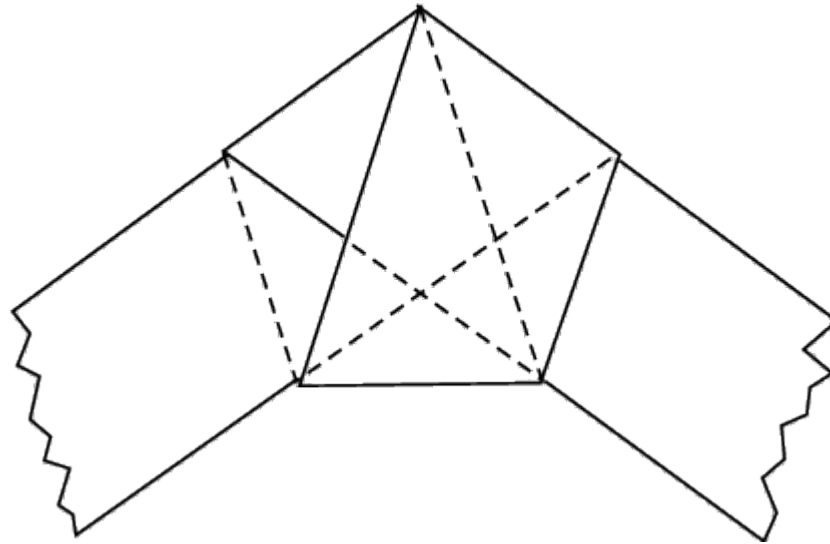


$$A+B+C+D+E =$$

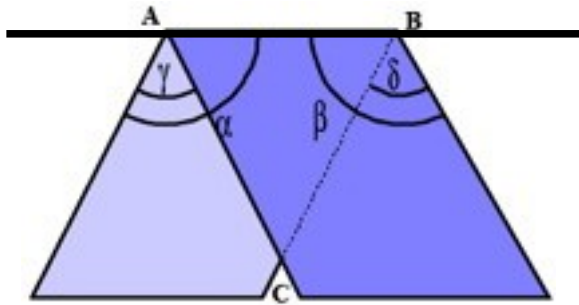


Nodo pentagonale

Facendo un nodo a una striscia di carta si ottiene un **pentagono regolare**!



...Nodo pentagonale



Piegando una striscia:

- angolo di “incidenza” e di “riflessione” uguali: $\alpha = \beta$.
- lati della striscia paralleli, allora $\gamma = \delta$.

$$\alpha - \gamma = \beta - \delta$$

ΔABC isoscele
 $\overline{AC} = \overline{BC}$

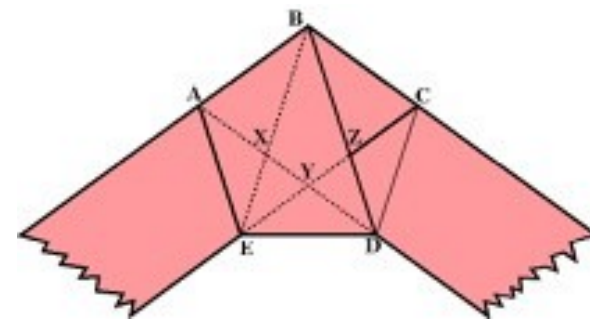
Nel nodo

$$(1) \angle EAB = \angle ABC = \angle BCD$$

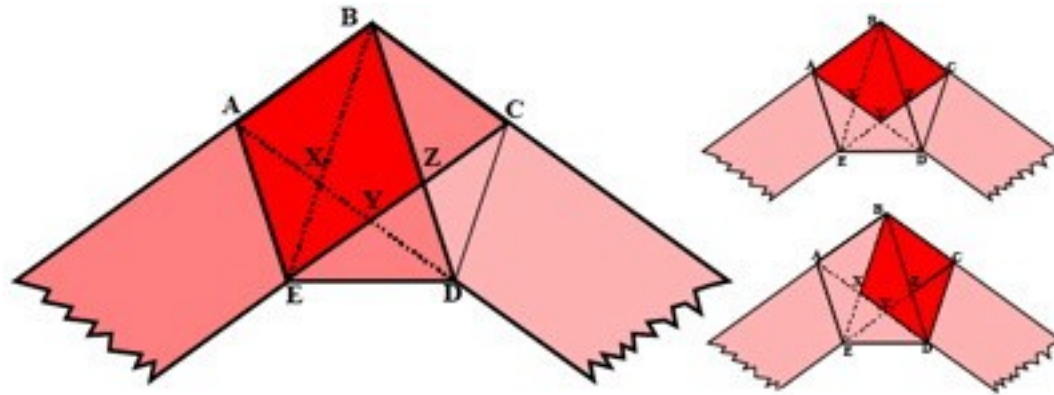
$$\angle CDE = \angle DEA$$

$$(2) \overline{BD} = \overline{BE}$$

$$\overline{BE} = \overline{CE}$$



...Nodo pentagonale



Quadrilateri $ABZE$, $ABCY$ e $BCDX$ sono *ROMBI*:

- parallelogrammi, perché con lati sui lati della striscia, lati opposti uguali:

$$AE = BZ \text{ e } AB = CY \text{ e } BX = CD$$

- h = altezza striscia, allora

$$\text{area}(ABZE): \quad S = h \cdot EZ \text{ e } S = h \cdot AE$$

$$EZ = AE$$

- analogamente per gli altri due

$$AX = BC \text{ e } BC = DX$$

$$EA = AB = BC = CD \quad (3)$$



...Nodo pentagonale

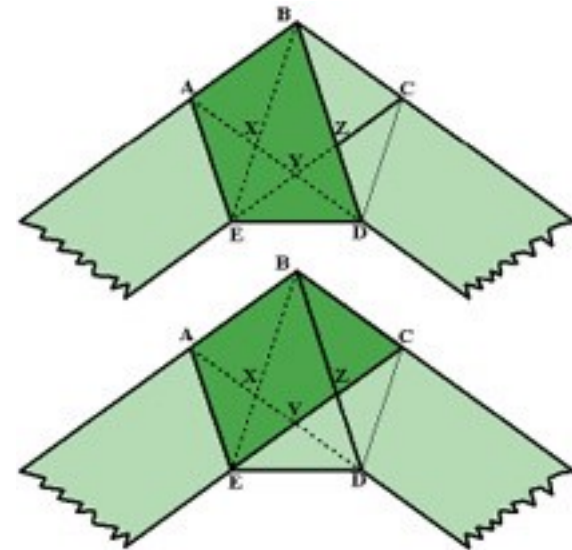
I trapezi $ABDE$ e $ABCE$ sono uguali poiché

1. $AB = BC$ per (3)
2. $EA = AB$ per (3)
3. $BD = CE$ per (2)
4. $\angle EAB = \angle ABC$ per (1)

e si ha

$$AE = ED \text{ e } \angle DEA = \angle EAB.$$

Insieme con (1) e (3) si dimostra che il pentagono è regolare! \square



Sitografia

- Centro Diffusione Origami

<http://www.origami-cdo.it>

- Francesco Decio e BergamOrigami

<http://www.bergamorigami.it>

- Robert J. Lang

<http://www.langorigami.com/>

- Tom Hull

<http://mars.wnec.edu/~th297133/>

- Papiroflexia y Matemáticas

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/papiroflexia/index.asp>



...Sitografia

- "Origami & Math" Eric M. Andersen

<http://www.paperfolding.com/math/>

- David Lister

<http://www.britishorigami.info/academic/lister/index.php>

- Thoki Yenn

<http://erikdemaine.org/thok/>

- Origami Database

<http://www.origamidatabase.com/>

- Tassellazioni origami

<http://www.origamitessellations.com/>



*Grazie e
Buone pieghe a tutti!*

Lucia e Francesco

