Università di Genova

Unione Matematica Italiana

Progetto Olimpiadi della Matematica

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\sqrt{3} = 1{,}7321$ $\sqrt{5} = 2{,}2360$ $\pi = 3{,}1415$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata attraverso il modulo di consegna.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani attraverso il canale previsto.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

BUON

DIVERTIMENTO!

() L'autore di un problema è indicato prima del testo.

Unione Matematica Italiana

Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi

Ministero dell'Istruzione e del Merito

1. Per il 2024 *Giuseppe Rosolini*

Qual è il più piccolo numero intero positivo n tale che la radice n-esima $\sqrt[n]{2024}$ di 2024 è minore di 3?

2. Fino al 2024 *Sandro Campigotto*

Scrivendo in ordine crescente tutti e soli i numeri interi non negativi le cui scritture usano solo le cifre "0", "2" e "4", che posizione occupa 2024?

3. Guardiani *Andrea Giusto*

Alle porte della città di Tarskent, dove ogni abitante dice sempre la verità oppure mente sempre, ci sono 2024 guardiani, numerati da 1 a 2024. Per entrare in città si deve rispondere alla domanda che fanno i guardiani dopo aver parlato:

Guardiano 1 Se esistono polinomi p tali che il polinomio p^2 ha una radice diversa dalle radici di p, allora tutti gli altri guardiani dicono il vero.
Guardiano 2 È falso.
Guardiano 1 Il numero di guardiani che dicono il vero è il più piccolo numero tale che i guardiani che mentono non siano più del doppio dei guardiani che dicono il vero.
Guardiano 2 Il numero di guardiani che dicono sempre il vero è la somma del più grande numero primo minore della metà di 2023 e del più grande numero primo minore di un terzo di 2023.
Guardiano 3 Io dico il vero.
Guardiano 4 È falso.
Guardiano 5 È falso.
Guardiano 6 È falso.
Guardiano 7 Io dico il vero.
Guardiano 8 È falso.
Guardiano 9 È falso.
Guardiano 10 Io dico il vero.
Guardiano 11 Io dico il vero.
⋮
Guardiano 2024 Io dico il vero.
Tutti i guardiani in coro Quanti di noi mentono sempre?

4. Distanze *Andrea Macco e Giuseppe Rosolini*

Con un teodolite fisso a terra, sono state valutare le distanze fino alla cima del Campanile e fino alla sommità della Porta Soprana. I due numeri che esprimono le due distanze sono nella stessa unità di misura. Si sa che

a) entrambe le distanze sono maggiori di 100 e minori di 1000;
b) rispetto al teodolite, le due distanze formano un angolo di 90°;
c) le due distanze sono due numeri interi consecutivi;
d) la minore delle due distanze ha come somma delle cifre 11 ed è multiplo di 17;
e) la maggiore delle due distanze ha tutte cifre pari.

Quanto vale, nell'unità di misura utilizzata, la distanza tra la cima del campanile e la Porta Soprana?

5. Piastrelle *Fabrizio Conca*

Per piastrellare un corridoio rettangolare 2 m × 12 m, si usano due tipi di piastrelle, di dimensioni 1 m × 2 m e 2 m × 2 m. In quanti modi diversi si può fare?

6. Verso il 2030 *Carlo Càssola*

Qual è il più piccolo numero intero positivo il cui quadrato è divisibile per uno dei prossimi sei anni, incluso il corrente (cioè da ora fino a prima del 2030)?

7. Fino a 100 *Lorenzo Mazza*

Fissato un numero pari a, si considera la sequenza $(a_n)_{n=1,\ldots,100}$ di cento numeri interi positivi costruita nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot n \end{cases}$$

Qual è il più picccolo numero a, intero positivo pari, tale che a_{100} è l'unico numero divisibile per 3^{53} nella sequenza?

8. Sufficienza
Federico Borasio

La classe è stata sottoposta a un esame al termine del quale a ogni studente è stato assegnato un voto intero compreso fra il minimo 1 e il massimo 100. Yu ha preso 31; per la sufficienza bastava prendere un voto maggiore o uguale a 30. Perciò la prova di Yu è sufficiente. Nella classe ci sono stati 8 studenti che hanno preso un voto sufficiente superiore a quello di Yu. Qual è il numero minimo di studenti della classe che hanno preso un voto insufficiente, che assicura che il voto di Yu sia strettamente superiore alla media dei voti della classe, qualunque siano i voti presi dai compagni?

9. Ombre nella notte
Sandro Campigotto

Sono in un viale nella notte, sotto la luce di un lampione. Sono alto 1,80 m: proietto un'ombra di 1 m. Se avanzo di un metro, l'ombra diventa lunga il triplo. A quale altezza si trova la luce del lampione in cm?

10. Reciprocando
Giuseppe Rosolini

Considera il più grande numero *r* che ha la seguente proprietà: quando a *r* aggiungi 3, poi calcoli il reciproco del risultato, a questo numero aggiungi 1, poi calcoli il reciproco dell'ultimo risultato, e a quello aggiungi 3, ottieni *r*. Che numero è *r*?
[*Dare come risposta le prime quattro cifre della parte decimale.*]

11. Su una scacchiera
Sandro Campigotto

Una pedina si trova nella casella della prima colonna e della riga centrale di una scacchiera a 10 colonne e 3 righe. Con una mossa la pedina avanza sempre nella colonna successiva, in una casella con almeno un vertice in comune con la casella da cui la si sposta. Quanti sono i percorsi che porteranno la pedina nella casella centrale della decima colonna?

12. Potenze
Sandro Campigotto e Giuseppe Rosolini

Si vede facilmente che non sempre $m^n = n^m$, ad esempio $0^2 \neq 2^0$, anche se $2^4 = 4^2$; perciò è necessario usare parentesi quando si iterano scritture a potenza. Purtroppo la somma

$$2^{4^{2^0}} + 0^{2^{4^2}} + 2^{0^{2^4}} + 4^{2^{0^2}}$$

è stata scritta senza parentesi e si possono ottenere risultati diversi in dipendenza di diverse inserzioni di parentesi. Chi ha scritto l'addizione intendeva usare sempre la stessa inserzione di parentesi, ma è rimasto ambiguo quale ha inteso usare tra le tante possibili. Ad esempio, non ha sicuramente inteso scrivere la somma $\left(\left(2^4\right)^2\right)^0 + 0^{\left(2^{\left(4^2\right)}\right)} + \left(\left(2^0\right)^2\right)^4 + 4^{\left(2^{\left(0^2\right)}\right)}$; d'altro canto, può benissimo aver inteso di scrivere la somma $\left(\left(2^4\right)^2\right)^0 + \left(\left(0^2\right)^4\right)^2 + \left(\left(2^0\right)^2\right)^4 + \left(\left(4^2\right)^0\right)^2$. Qual è la somma di tutti i risultati diversi possibili al variare delle inserzioni delle parentesi?

13. Un pranzo a Tarskent
Lorenzo Mazza

Sull'isola di Tarskent ci sono 2024 abitanti, alcuni dei quali sono cavalieri (che dicono sempre la verità) e altri furfanti (che mentono sempre). Viene organizzato un pranzo con una lunga tavolata alla quale siedono tutti loro. Il cuoco, che proviene da un'altra isola e non conosce i gusti dei presenti; chiede loro a quanti piace la pasta e si alzano 2024 mani, poi chiede a quanti piace la carne e si alzano le mani della metà dei presenti, quindi chiede a quanti piace il pesce e si alzano ancora le mani della metà dei presenti, infine chiede a quanti piace il formaggio e solo un quarto dei presenti alza la mano. Sapendo che a ciascuno degli abitanti dell'isola piace una ed una sola portata tra le quattro proposte dal cuoco, quanti sono i cavalieri?

14. Motivi *Andrea Macco e Giuseppe Rosolini*
I costruttori della scuola matematica devono disporre quattro mattonelle quadrate di uguali dimensioni, ma di colori diversi, in modo da formare motivi ornamentali planari per decorare le pareti. Ciascuna mattonella è bifronte, cioè le sue due facce sono identiche: stesso colore, stessa porosità, (ovviamente) stesse dimensioni. Così una mattonella può essere adagiata su una qualunque delle sue due facce con identico effetto. I maestri che hanno dato l'ordine hanno solo specificato che per formare un motivo ogni mattonella deve toccarne almeno un'altra con un intero lato, e almeno una mattonella deve toccarne almeno due. Però non hanno specificato più in dettaglio come disporle. Quanti motivi diversi possono ottenere i costruttori a meno di simmetrie del motivo?

15. Tutte diverse *Carlo Càssola*
Quanti sono i numeri aventi le cifre tutte diverse e che hanno le cifre disposte in ordine strettamente crescente oppure in ordine strettamente decrescente?

16. Quadrati *Sandro Campigotto*
Sulla retta r sono dati in ordine tre punti A, B, e C tali che $AB = 20$ m e $BC = 80$ m. Sono costruiti, dalla stessa parte del piano rispetto a r, un quadrato $ABDE$ e un rettangolo $BCFG$ con $BG = 70$ m. Sia H il punto di intersezione tra i segmenti AF e CE. Qual è la lunghezza di BH in cm?

17. Ultime *Sandro Campigotto*
Quali sono le ultime quattro cifre (migliaia, centinaia, decine e unità) della parte intera della radice quadrata di
$2022 \times 2024^2 \times 2026 + 5$?

18. Regalo *Fabrizio Conca*
Un gruppo di 6 amici organizza uno scambio di regali. Un foglietto con ciascun nome viene messo in un'urna. Uno dopo l'altro, i sei amici estraggono un foglietto senza guardare che nome c'è scritto sopra: il nome sul foglietto pescato da ciascuno sarà il destinatario del suo regalo. L'estrazione non è valida se almeno una persona deve regalare il regalo a se stessa. Qual è la probabilità che l'estrazione non sia valida?
[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

19. Aroma *Carlo Càssola*
Un numero è ***aromatico*** se è composto soltanto da cifre dispari, a due a due diverse, e nessuna permutazione delle cifre produce un numero divisibile per 7. Perciò un numero aromatico non può essere superiore a 99999. Esistono certamente numeri aromatici, ad esempio 17 (e 71). Mentre 53 non è aromatico perché 35 è divisibile per 7. Qual è la somma di tutti i numeri aromatici?
[*Dare come risposta le prime quattro di cifre da destra del risultato.*]

20. Connessione *Giuseppe Rosolini*
Ventisette rilevatori sono disposti in un reticolo cubico $3 \times 3 \times 3$. Su ciascuna faccia (quadrata) del cubo ci sono 9 rilevatori: quattro nei vertici, quattro nei punti medi dei lati, 1 al centro della faccia. Un ulteriore rilevatore è al centro del cubo. Ogni rilevatore è collegato direttamente a ciascuno di quelli più vicini ad esso (almeno 3, al massimo 6 a seconda della posizione nel reticolo cubico) mediante un cavo che sta su uno spigolo del cubo, oppure è parallelo a un spigolo. Ci sono due rilevatori speciali: il rilevatore A nel vertice in basso, a sinistra, davanti; il rilevatore I nel vertice opposto, in alto, a destra, dietro. Gli sperimentatori conducono un test sul reticolo di rilevatori per determinare se trasmettono correttamente. Al termine del test, il rapporto elenca la stessa risposta per tutti i rilevatori: "Esattamente 4 rilevatori collegati direttamente a me non trasmettono correttamente." Chiaramente qualche rilevatore non trasmette correttamente.
Gli sperimentatori si rendono conto che i rilevatori che trasmettono correttamente sono il numero massimo possibile e preparano un secondo test in modo che un segnale, inserito nel reticolo a partire dal rilevatore A arrivi al rilevatore I passando attraverso tutti i rilevatori che trasmettono correttamente. Qual è il minor numero possibile di volte che il segnale passa in un rilevatore che non trasmette correttamente?

21. Polvere *Giuseppe Rosolini*
È possibile utilizzare quattro tetraedri regolari di lato ℓ e un ottaedro regolare, pure di lato ℓ, per ottenere un tetraedro di lato 2ℓ, appoggiando i tetraedri di lato ℓ contro quattro facce opportune tra le otto dell'ottaedro di lato ℓ. Quanti ottaedri e tetraedri di lato ℓ servono per ottenere un tetraedro di lato 8ℓ, appogiando i tetraedri contro facce opportune degli ottaedri?

Gara di matematica a squadre femminili 2024
Soluzioni

Università di Genova

Soluzione del problema 1. $3^6 = 729 < 2024 < 2187 = 3^7$.
La risposta è `0007`.

Soluzione del problema 2. L'ordine naturale delle tre cifre è $0 < 2 < 4$ e questo si estende in modo "lessicografico" alle n-ple ordinate di cifre, in particolare alle quadruple (a, b, c, d). Prima di $(2, 0, 2, 4)$ ci sono tutte le 27 quadruple $(0, b, c, d)$ e le 5 quadruple

$$(2,0,0,0) \quad (2,0,0,2) \quad (2,0,0,4) \quad (2,0,2,0) \quad (2,0,2,2)$$

La risposta è `0033`.

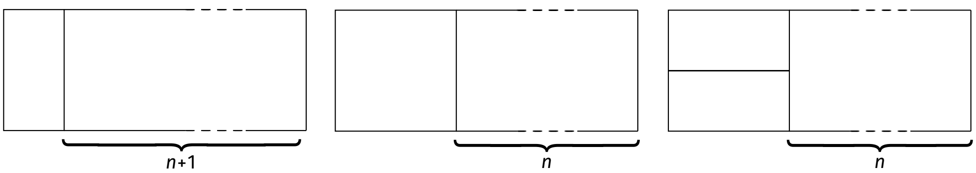
Soluzione del problema 3. La prima frase del guardiano 1 è vera, poiché il polinomio p^2 ha le stesse radici di p. Perciò il guardiano 2 mente. Dalla terza frase si calcola perciò che il numero di guardiani che dicono la verità è il minimo n tale che $2n \geq 2024 - n$, cioè $n \geq \frac{2024}{3} = 674{,}\overline{6}$. Così i guardiani che dicono il vero sono 675 e la risposta è $2024 - 675 = 1349$.
La risposta è `1349`.

Soluzione del problema 4. I multipli di 17 che hanno resto 2 nella divisione con 9 sono

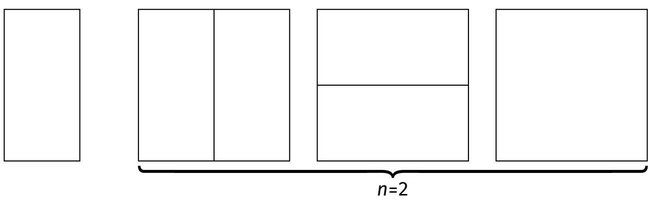
$$119 \quad 272 \quad 425 \quad 578 \quad 731 \quad 884$$

L'unico con le centinaia e le decine pari, e le unità dispari è 425. E $\sqrt{425^2 + 426^2} = \sqrt{362101} \approx 601{,}7$.
La risposta è `0601`.

Soluzione del problema 5. Sia a_n il numero di tassellazioni di una stanza $2 \times n$. Una tassellazione può iniziare in uno di questi modi:



cioè $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Dato che per $n = 1$ c'è una sola tassellazione possibile e per $n = 2$ ce ne sono tre



la definizione per ricorsione di a_n è

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, & n \geq 3 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

L'equazione associata è $r^2 - r - 2 = 0$, da cui $r = 2$ o $r = -1$. La forma chiusa per a_n è così $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$. Imponendo le condizioni iniziali si trova che

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ 4\alpha + \beta = 3 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Dunque

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

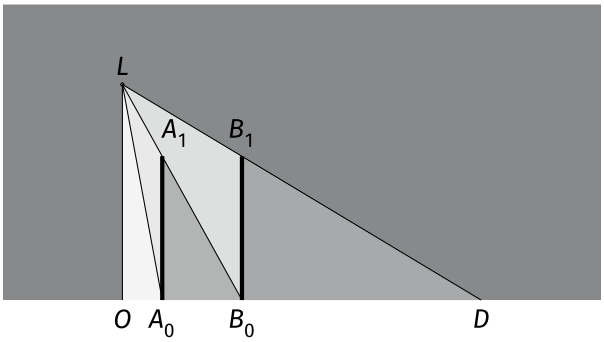
Per $n = 12$ ci sono $\frac{8192+1}{3} = 2731$ modi per tassellare la stanza.
La risposta è 2731.

Soluzione del problema 6. Dato che 2027 e 2029 sono primi, interessano le fattorizzazioni di 2024, che è $2^3 \times 11 \times 23$, di 2025, che è $3^4 \times 5^2$, di 2026, che è 2×1013, e di 2028 che è $2^2 \times 3 \times 13^2$. Quest'ultimo divide il quadrato di $2 \times 3 \times 13 = 78$. Ma 2025 è il quadrato di $3^2 \times 5 = 45$.
La risposta è 0045.

Soluzione del problema 7. La richiesta è che $3^{53} | 99!a$, ma $3^{53} \nmid 98!a$. La potenza di 3 nella scomposizione di 99! è 48, dato che $\left\lfloor \frac{99}{3} \right\rfloor = 33$, $\frac{33}{3} = 11$, $\left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor = 3$ e $\frac{3}{3} = 1$. Perciò le condizioni richieste impongono che $2 \cdot 3^5 | a$.
La risposta è 0486.

Soluzione del problema 8. Il valore massimo della media si ottiene quando ognuno degli studenti sufficienti, Yu escluso, prende 100, e che ognuno degli n studenti insufficienti prende 29. In questo caso la media è $\dfrac{29n + 8 \times 100 + 31}{n + 9}$. Imponendo che sia minore di 31, si ottiene che $29n + 831 < 31(n + 9)$, cioè $n > 276$.
La risposta è 0277.

Soluzione del problema 9. Siano $x = OL$, $h = A_0A_1 = B_0B_1$, $a = OA_0$, $b = A_0B_0$, $c = B_0D$. Così $OB_0 = a + b$ e $OD = a + b + c$.



Si ha che $x : h = (a+b) : b$ e $x : h = (a+b+c) : c$. Perciò $a = \frac{b^2}{c-b}$ e $\frac{a+b}{b} = \frac{c}{c-b}$; dunque $x = h\frac{c}{b} = 1{,}8\frac{3}{2}$ m $= 2{,}7$ m (e $a = 5$ m). La risposta è 0270.

Soluzione del problema 10. La condizione richiede che

$$r = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + r}}$$

Perciò $r - 3 = \dfrac{3 + r}{3 + r + 1}$. Dunque $(r + 3)(r - 3) = 6$, cioè $r^2 = 15$.
La risposta è 8729.

Soluzione del problema 11. Indichiamo con $m(i, j)$ il numero di percorsi possibili che portano la pedina nella casella in riga i e colonna j, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 10$. Perciò (per semplicità consideriamo illimitato il numero di colonne)

$$\begin{array}{lll} m(1,1) = 0 & m(2,1) = 1 & m(3,1) = 0 \\ m(1,j+1) = m(1,j) + m(2,j) & m(2,j+1) = m(1,j) + m(2,j) + m(3,j) & m(3,j+1) = m(2,j) + m(3,j) \end{array}$$

e si dimostra immediatamente per induzione che $m(1, j) = m(3, j)$. Basta tabulare fino ai secondi argomenti 10 la funzione m data per ricorsione come

$$\begin{array}{ll} m(1,1) = 0 & m(2,1) = 1 \\ m(1,j+1) = m(1,j) + m(2,j) & m(2,j+1) = 2m(1,j) + m(2,j) \end{array}$$

per trovare le mosse per tutta la scacchiera

$$\begin{array}{l|rrrrrrrrrr} m(1,-) & 0 & 1 & 2 & 5 & 12 & 29 & 70 & 169 & 408 & 985 \\ m(2,-) & 1 & 1 & 3 & 7 & 17 & 41 & 99 & 239 & 577 & 1393 \end{array}$$

La risposta è 1393.

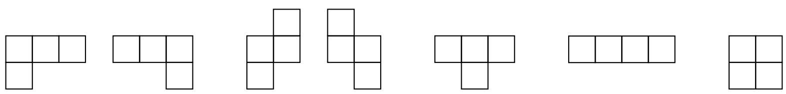
Soluzione del problema 12. Per leggere più comodamente le distribuzioni di parentesi, indichiamo la potenza m^n con scrittura lineare $m \wedge n$. Le distribuzioni di tre coppie di parentesi correttamente annidate sono 5 (il quarto numero di Catalan). Le potenze corrispondenti sono elencate in tabella:

	$n \wedge (m \wedge (h \wedge k))$	$n \wedge ((m \wedge h) \wedge k)$	$(n \wedge m) \wedge (h \wedge k)$	$(n \wedge (m \wedge h)) \wedge k$	$((n \wedge m) \wedge h) \wedge k$
2 4 2 0	16	2	16	1	1
0 2 4 2	0	0	0	0	0
2 0 2 4	1	1	1	1	1
4 2 0 2	4	4	1	16	1
	21	7	18	18	3

La risposta è 0049.

Soluzione del problema 13. Gli n cavalieri alzano la mano una ed una sola volta, gli $m = 2024 - n$ furfanti alzano la mano tre volte (ogni volta che il cuoco elenca un piatto che gli non piace). Le mani alzate $2024 + 1012 + 1012 + 506 = 4554$ sono anche $n + 3 \times (2024 - n) = 6072 - 2n$. Dunque $n = \frac{6072-4554}{2} = 759$.
La risposta è 0759.

Soluzione del problema 14. Le forme possibili sono i tetramini:



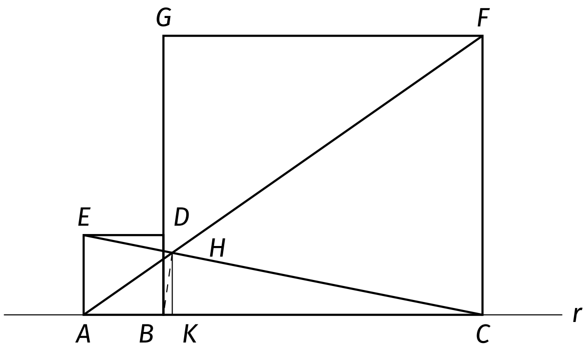
Le prime due configurazioni planari sono simmetriche: i motivi che si ottengono con una sono gli stessi che si ottengono con l'altra, un motivo dipende soltanto dall'ordine delle mattonelle. È così anche per la terza e quarta configurazione, che non cambiano per rotazione di 180°.
La quinta configurazione è simmetrica rispetto all'asse verticale: ciascun motivo si ottiene ugualmente da coppie di distribuzioni di mattonelle. Lo stesso per la sesta configurazione.
L'ultimo tetramino ha otto simmetrie.
Si ottengono $4!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = 63$.
La risposta è 0063.

Soluzione del problema 15. Una lista $(a_1, a_2, \dots, a_\ell)$ di cifre in ordine strettamente crescente è totalmente determinata dall'insieme non-vuoto delle sue componenti. Perciò i numeri positivi, scritti con cifre diverse in ordine strettamente crescente, sono $2^9 - 1 = 511$.
I numeri positivi, scritti con cifre diverse in ordine strettamente decrescente, si ottengono

a) rovesciando ciascuna delle 511 liste del caso precedente;
b) allungando con una cifra 0 ciascuna di quelle ottenute al punto precedente;
c) cancellando le liste di lunghezza 1 perchè già considerate tra quelle in ordine cresente.

Sono perciò $2 \times 511 - 9 = 1013$—si può anche fare un calcolo simile al precedente, evitando l'aggiunta successiva, ma comunque notando il punto c).
Aggiungendo infine il numero 0, il totale è $511 + 1013 + 1 = 1525$.
La risposta è `1525`.

Soluzione del problema 16. Sia K l'interesezione della retta perpendicolare da H a r. Si fissino $x = HK$, $a = AB$, $b = BC$, $c = a + b$, $d = BG$, $h = AK$, $k = KC = c - h$.



Allora $h : x = c : d$ e $k : x = c : a$. Perciò $c = h + k = cx\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right)$ e $x = \frac{ad}{a+d} = \frac{140}{9}$ m. Così $h = x\frac{c}{d} = \frac{200}{9}$ m e

$$BH = \sqrt{x^2 + (h - a)^2} = \frac{10\sqrt{200}}{9} \text{ m} \approx 15{,}71 \text{ m}$$

La risposta è `1571`.

Soluzione del problema 17. Si noti che $2022 \times 2024^2 \times 2026 + 4 = (2024^2 - 2)^2$.
Si noti per conferma che, per numeri reali $r > d > 0$, considerata la differenza $\delta = (r + d)^2 - r^2 = d(2r - d)$, si trova d è compreso tra $\frac{\delta}{2r}$ e $\frac{\delta}{r}$. Perciò, presi $r = 2024^2 - 2$ e d in modo tale che $(r + d)^2 = (2024^2 - 2)^2 + 1$, si ha che $d < \frac{1}{r} < 1$.
La risposta è `6574`.

Soluzione del problema 18. Un'estrazione valida corrisponde a una permutazione senza punti fissi di un insieme di 6 elementi. Una permutazione senza punti fissi può essere di una delle seguenti forme distinte tra loro:

(a) un 6-ciclo (sono $5! = 120$);
(b) un 2-ciclo composto con un 4-ciclo disgiunto (sono $\binom{6}{2} \cdot 3! = 90$);
(c) un 3-ciclo composto con un 3-ciclo disgiunto (sono $\binom{6}{3} \cdot 2! = 40$);
(d) la composizione di tre 2-cicli, a due a due disgiunti (sono $\frac{1}{3!}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 15$).

In totale ci sono $120 + 90 + 40 + 15 = 265$ permutazioni di 6 elementi senza punti fissi. La probabilità di dover ripetere l'estrazione è

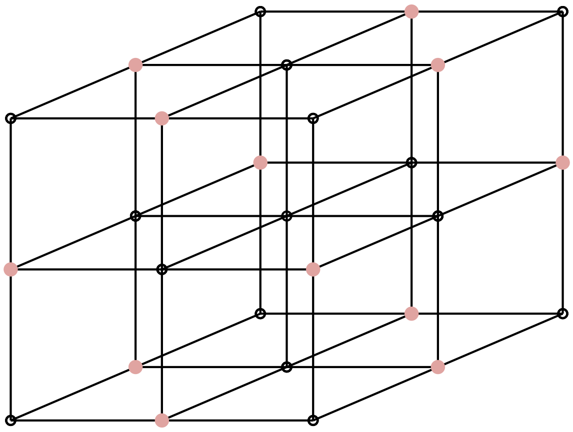
$$\frac{6! - 265}{6!} = \frac{455}{720} = \frac{91}{144}$$

La risposta è `0235`.

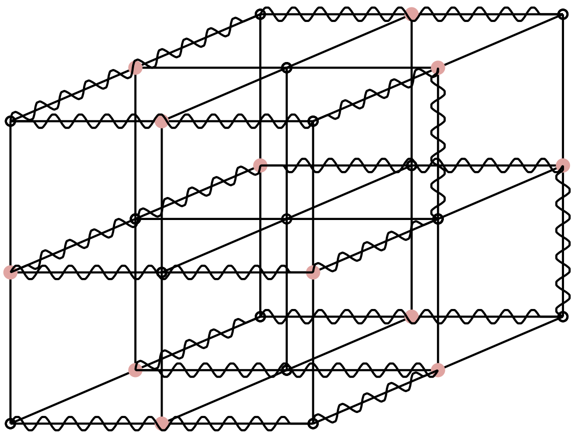
Soluzione del problema 19. Si noti che un numero di quattro cifre $n = a10^0 + b10^1 + c10^2 + d10^3$, dove a, b, c e d sono cifre, è divisibile per 7 esattamente quando la somma $a + 3b + 2c - d$ è divisibile per 7. Si esclude a questo punto che n sia aromatico perché 3157, 3591, 9317, 5719 e 3759 verificano la condizione di divisibilità. Perciò i numeri aromatici sono al massimo di tre cifre.
Per questi ci sono dieci blocchi di cifre da controllare: si vede che 175, 315, 357, 371, 539, 791, 931 e 973 verificano la condizione di divisibilità per 7, mentre i due gruppi costituiti dalle cifre 1, 5 e 9, e 5, 7 e 9 producono dodici numeri aromatici: 159, 195, 519, 591, 915 e 951, 579, 597, 759, 795, 957 e 975.

Per i numeri inferiori a 99, si trovano rapidamente i multipli di 7, che sono 7, 35, 91. Perciò sono aromatici 1, 3, 5, 9, 13, 15, 17, 31, 37, 39, 51, 57, 59, 71, 73, 75, 79, 93, 95 e 97.
La risposta è 8912.

Soluzione del problema 20. Il numero massimo di rilevatori che trasmettono correttamente è 12 e sono indicati in chiaro:



I rilevatori nei vertici A e I non trasmettono correttamente e il percorso più breve deve coinvolgere almeno 13 rilevatori che non trasmettono correttamente, ed effettivamente se ne possono trovare molti: uno di questi e' indicato in figura.



La risposta è 0013.

Soluzione del problema 21. Si indichi $\mathbf{T}(i)$ e $\mathbf{O}(i)$ rispettivamente il tetraedro e l'ottaedro di lato $i\ell$. Ad esempio, dato che un tetraedro di lato 2ℓ si ottiene con 4 tetraedri di lato ℓ e 1 ottaedro di lato ℓ, e un ottaedro di lato 2ℓ si ottiene con 8 tetraedri di lato ℓ e 6 ottaedri di lato ℓ si scrive che

$$\mathbf{T}(2) = 4\mathbf{T}(1) + \mathbf{O}(1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{O}(2) = 8\mathbf{T}(1) + 6\mathbf{O}(1),$$

Perciò

$$\mathbf{T}(4) = 4\mathbf{T}(2) + \mathbf{O}(2) = 4(4\mathbf{T}(1) + \mathbf{O}(1)) + (8\mathbf{T}(1) + 6\mathbf{O}(1)) = 24\mathbf{T}(1) + 10\mathbf{O}(1),$$

e

$$\mathbf{T}(8) = 24\mathbf{T}(2) + 10\mathbf{O}(2) = 24(4\mathbf{T}(1) + \mathbf{O}(1)) + 10(8\mathbf{T}(1) + 6\mathbf{O}(1)) = 176\mathbf{T}(1) + 84\mathbf{O}(1),$$

La risposta è 0260.