Università di Genova

Unione Matematica Italiana

# Progetto Olimpiadi della Matematica

Ministero dell'Istruzione e del Merito

## Istruzioni Generali

- Per tutti i problemi(1) occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera—cioè, il resto della divisione con $10^4$; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
  a) la *parte intera* di un numero reale $x$ è il più grande intero minore o uguale ad $x$; si scrive $\lfloor x \rfloor$—ad esempio $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\left\lfloor \sqrt{17} \right\rfloor = 4$;
  b) il *successivo* del numero intero $n$ è il numero $n + 1$ e i due numeri sono detti *consecutivi*;
  c) il *fattoriale* del numero intero $n$ è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a $n$; si scrive $n!$—ad esempio $1! = 1$, $5! = 120$, $6! = 720$;
  d) un *quadrato perfetto* è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
  e) una lista è *palindroma* se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio `radar` è palindroma; `drone` non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\sqrt{3} = 1{,}7321$ $\sqrt{5} = 2{,}2360$ $\pi = 3{,}1415$.

# Buon divertimento!

(1) L'autore di un problema è indicato prima del testo.

Unione Matematica Italiana

# Gara a Squadre Miste – Testi dei problemi

Ministero dell'Istruzione e del Merito

## 1. Cerchi
*Sandro Campigotto*

L'area su cui due cerchi di raggio 10 cm e 50 cm si sovrappongono vale $20\pi\,\text{cm}^2$. Quanto misura in $\text{cm}^2$ l'area ricoperta dai due cerchi?

## 2. Quadrati
*Carlo Càssola*

Qual è il quadrato di $\sqrt{2023} + \sqrt{112}$?

## 3. Reali
*Carlo Càssola*

Tre numeri reali positivi $a$, $b$ e $c$ sono tali che il prodotto di $a$ e $b$ coincide con il quadrato di $c$. La loro somma è 102 mentre la somma dei loro reciproci è $\frac{17}{18}$ e $a < b$. Quali sono i tre numeri $a$, $b$ e $c$?
[*Dare come risposta il prodotto dei tre numeri.*]

## 4. Compleanni
*Carlo Càssola*

Un nonno ultracentenario e un nipote compiono gli anni nello stesso giorno (ma hanno età diverse). Il nonno osserva che la sua età è un multiplo intero di quella di suo nipote e che sarà multipla di quella di suo nipote anche per i successivi cinque anni. Qual è la minima età che il nonno può avere oggi?

## 5. Cifre
*Lorenzo Mazza*

Dante e Marta vogliono entrambi aprire una cassaforte protetta da un PIN di quattro cifre. Entrambi sono venuti a sapere che la prima cifra è 2 e che il PIN è un multiplo di 9. Inoltre, Marta sa che Dante conosce anche la seconda e la terza cifra del PIN. Marta sa in più che il PIN è un numero pari. Vede che Dante non è in grado di determinare univocamente il PIN della cassaforte. Qual è il numero maggiore che Marta dovrà provare come PIN?

## 6. Vicini
*Pietro Donatis*

In un poligono regolare di 59 lati si tracciano da ogni vertice le due diagonali che lo congiungono con i vertici suoi secondi vicini. In questo modo si viene a tracciare una stella a 59 punte. Quanti gradi sessagesimali vale l'angolo in una punta della stella?

## 7. Torte e biscotti
*Carlo Càssola*

In pasticceria sono disponibili biscotti al cioccolato al costo di 1€ ciascuno, pasticcini a 2€ ciascuno, e torte a 11€ ciascuna. Il millesimo cliente della pasticceria riceve come premio 79€ da spendere totalmente e immediatamente. In quanti modi diversi può spendere il suo premio?

## 8. Interi
*Carlo Càssola*

Tutti i numeri interi da 1 a 10000 compaiono sul foglio. Quante cifre ci sono scritte in totale?

## 9. Pavimenti
*Anna Ulivi*

Un pavimento rettangolare con lati di lunghezza intera in dm deve essere ricoperto completamente da piastrelle quadrate di lato 1 dm. Sono disponibili 1000 piastrelle. Sono state posate tutte le piastrelle lungo il bordo del pavimento: sono 124. Usate tutte le 1000 piastrelle, il pavimento non è completamente coperto. Anzi il numero di piastrelle mancanti è il massimo possibile con i dati a disposizione. Quante piastrelle mancano?

## 10. Triple
*Carlo Càssola*

Una tripla ordinata di numeri interi maggiori di 9 e minori di 100 è *mirata* quando, prese due componenti qualunque in essa, la loro somma è uguale al rimanente numero della tripla scritto a cifre invertite. Quante sono le triple ordinate di numeri mirati?

## 11. Tessere
*Sandro Campigotto*

Tre amici, Andrea, Barbara e Claudio, hanno riempito un sacchetto con 100 tessere, ciascuna contrassegnata da un numero (da 1 a 100, ciascuno dei cento numeri compare su almeno una tessera). Andrea pesca un numero, lo guarda e lo rimette nel sacchetto. Poi Claudio pesca un numero, lo guarda e lo rimette nel sacchetto. Infine Barbara pesca un numero, lo guarda e lo rimette nel sacchetto. Qual è la probabilità che uno dei tre abbia pescato il numero che è esattamente la somma dei due numeri pescati dai suoi amici?
[*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10000.]

## 12. Riquadri a T
*Sandro Campigotto*

Su un foglio quadrettato scrivi 9 in un riquadro. Poi segna i tre riquadri che seguono quello con la cifra 9 verso destra, verso sinistra e verso il basso: in totale sono segnati nove riquadri vuoti. In quanti modi diversi puoi disporre tutte le cifre da 0 a 8 nei nove riquadri vuoti in modo che in ciascuna delle tre direzioni dal riquadro "centrale" (quello con la cifra 9) verso l'esterno, le cifre siano disposte in ordine decrescente?

## 13. In un triangolo
*Lorenzo Mazza*

Nel triangolo $ABC$ l'angolo $A\hat{C}B$ è $42^\circ$. I punti $L$, $M$ e $N$, sui lati $AB$, $BC$ e $CA$ rispettivamente, sono tali che $LB = LM$ e $LA = LN$. Sia $O$ il circocentro del triangolo $MNC$. Qual è l'ampiezza in gradi sessagesimali dell'angolo $O\hat{L}M$?

## 14. Pagine strappate *Carlo Càssola*

Su tutte le pagine di un libro sono stampati i numeri di pagina, tutti scritti in cifre arabe. Dal libro viene strappato un foglio (che contiene due pagine consecutive). La somma dei numeri delle pagine rimanenti è 22000. Quante pagine aveva il libro originariamente?

## 15. Il regalo *Simon Ghizzo*

Gianfilippo deve incartare il regalo di compleanno per il suo amico Pieralfredo. Il pacchetto è un parallelepipedo di dimensioni 25 cm × 30 cm × 50 cm. Gianfilippo decide di chiudere l'incarto del pacchetto utilizzando due nastri: uno rosso di larghezza 3 cm e uno giallo di larghezza 7 cm. Utilizza quindi i nastri per cingere il pacchetto formando delle croci su ciascuna delle sue facce, quello giallo posto perpendicolarmente ai lati di 30 cm e quello rosso agli altri. Qual è il valore in $cm^2$ dell'area del pacchetto non coperta dai nastri?

## 16. Quadrilateri inscatolati *Anna Ulivi*

Sia $ABCD$ un rettangolo con base lunga 48 m e altezza lunga 24 m. Si prendono i quattro punti medi dei lati, $A_1$ su $AB$, $B_1$ su $BC$, $C_1$ su $CD$ e $D_1$ su $DA$ e si considera il quadrilatero $A_1B_1C_1D_1$. Su questo si prendono i quattro punti medi dei lati, e si considera il quadrilatero così ottenuto. Si continua fino al quadrilatero $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$. Quanto misura in mm il perimetro del quadrilatero $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$?

## 17. Sinner e Medvedev *Andrea Giusto*

Sinner e Medvedev giocano l'incontro finale di un torneo di tennis. Un *incontro*(=*match*) di tennis tra due giocatori è suddiviso in *giochi*(=*games*). In un game i giocatori cercano di vincere punti; ogni punto viene vinto da uno dei giocatori; i giocatori giocano un punto alla volta. Un game finisce con la vittoria di uno dei giocatori quando questo è il primo a vincere almeno 4 punti e almeno 2 punti in più di quelli dell'avversario. Ad esempio, possibili punteggi di vittoria di un game sono 4 punti a 1, 5 a 3, 8 a 6. Un game non finisce quando il punteggio è, ad esempio, 3 punti a 0, 4 a 3, 8 a 7. Punteggi impossibili sono, ad esempio, 5 a 1, 8 a 5. I resoconti dei precedenti scontri tra Sinner e Medvedev mostrano che Sinner vince un punto con probabilità $\frac{2}{3}$—conseguentemente Medvedev lo vince con probabilità $\frac{1}{3}$. In base ai resoconti, qual è la probabilità che Sinner vinca un game?
[*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10000.]

## 18. Decimali *Lorenzo Mazza*

Si consideri la scrittura decimale $n = 101010\ldots101$ ottenuta alternando le cifre 1 e 0, con la cifra 1 presente $k$ volte e la cifra 0 presente $k-1$ volte, con $2 \le k \le 1000$. Quanti dei numeri $n$ sono primi?

## 19. Un gioco *Matteo Littardi*

Eva inventa un semplice passatempo: scrive alla lavagna un numero intero positivo e lo sostituisce con la somma delle sue cifre, fino ad avere una singola cifra. Giocare in base 10, però, l'annoia molto velocemente: decide allora di ripetere lo stesso gioco, sempre con lo stesso numero $n$, ma in basi diverse, usando eventualmente come cifre superiori alcune delle 26 lettere dell'alfabeto inglese. Se, ad esempio, deve scrivere un numero in base 11, dopo le dieci cifre usuali Eva usa la lettera *A* come undicesima. Se deve scrivere un numero in base 36 usa tutte le lettere dell'alfabeto inglese: così *J* sarà la ventesima cifra, *K* la ventunesima, *W* la trentatreesima, *X* la trentaquattresima, *Y* la trentacinquesima. Avendo un impegno, Eva interrompe il gioco e annota i risultati ottenuti su un foglio, che lascia nella stanza, e cancella tutti i calcoli sulla lavagna. Poco dopo entra Roberto, che aggiunge alcune scritte nel foglio. Sul foglio ora c'è scritto

- In base 11 ho ottenuto 6.
- In base 29 ho ottenuto S.
- In base 7 ho ottenuto 2.
- In base 15 ho ottenuto 8.
- In base 36 ho ottenuto Z.
- In base 19 ho ottenuto 8.
- In base 13 ho ottenuto 2.

In effetti, Roberto ha inserito due righe e i risultati che ha indicato sono entrambi errati. Qual è la scrittura in base 10 del minimo numero $n$ che Eva poteva avere utilizzato?

## 20. Origami *Carlo Càssola*

Dato un triangolo isoscele $ABC$ avente base di lunghezza 24 cm e lati obliqui di lunghezza 38 cm, si tracciano i punti medi $M$, $N$ e $P$ dei lati e si disegnano i tre segmenti che li congiungono. Il triangolo $ABC$ risulta così diviso in quattro triangoli disgiunti. Piegando $ABC$ lungo i lati di $MNP$, si può formare un tetraedro dato che $M$, $N$ e $P$ sono i punti medi dei lati di $ABC$. Qual è il volume del tetraedro in $cm^3$?

## 21. Somme *Fabrizio Conca*

Per $n \ge 0$ sia $a_n$ il numero di modi in cui è possibile scrivere $n$ come somma ordinata di numeri interi positivi in modo tale che due addendi vicini non siano mai uguali. Per esempio, è chiaramente $a_1 = 1$, come pure $a_2 = 1$. Del resto, 5 può essere scritto come

$$5 \quad 1+4 \quad 4+1 \quad 2+3 \quad 3+2 \quad 2+1+2 \quad 1+3+1$$

ma non come $1+1+3$ o $1+2+2$: quindi $a_5 = 7$. Alcuni altri valori di $a_n$ sono $a_9 = 71$, $a_{10} = 124$, $a_{11} = 214$, $a_{12} = 378$, $a_{13} = 661$, e $a_{14} = 1152$. Ma quanto vale $a_{15}$?

# Gara di matematica a squadre miste 2024
# Soluzioni

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Università di Genova

**Soluzione del problema 1.** $[(10^2+50^2)-20]\pi\,\mathrm{cm}^2 = 2580\pi\,\mathrm{cm}^2$. La risposta è 8105.

**Soluzione del problema 2.** $(\sqrt{2023}+\sqrt{112})^2 = 2023+112+2\sqrt{2023\cdot 112} = 2135+2\sqrt{2^4\cdot 7^2\cdot 17^2} = 2135+952$. La risposta è 3087.

**Soluzione del problema 3.** Le tre condizioni producono la catena di uguaglianze

$$\frac{17}{18} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{102}{ab}$$

Perciò $c^2 = ab = \frac{102\cdot 18}{17} = 108$. Così $c = 6\sqrt{3}$ e $a+b = 6(17-\sqrt{3})$, da cui $b = 6(17-\sqrt{3})-a$. Perciò $a^2-6(17-\sqrt{3})a+108 = 0$ che produce $a = 3(17-\sqrt{3}-\sqrt{280-34\sqrt{3}})$ e $b = 3(17-\sqrt{3}+\sqrt{280-34\sqrt{3}})$, mentre $abc = c^3 = 6^3\cdot 3\sqrt{3}$. La risposta è 1122.

**Soluzione del problema 4.** Le prime possibilità sono le sequenze che iniziano da 61 e da 121. La risposta è 0121.

**Soluzione del problema 5.** Dante conosce le prime tre cifre del PIN e sa che esso è un multiplo di 9, ma non è in grado di determinarlo. Ciò significa che, necessariamente, le prime tre cifre sono anch'esse un multiplo di 9 e la quarta cifra può essere 0 o 9 (diversamente, se le prime tre cifre conosciute da Dante non dessero un numero multiplo di 9, la quarta cifra sarebbe univocamente determinata). Marta, che sa che il PIN è un numero pari, deduce che la quarta cifra è 0. C'è un unico numero che verifica tutte le condizioni. La risposta è 2970.

**Soluzione del problema 6.** Si calcola $\frac{55}{59}180^\circ$. La risposta è 0167.

**Soluzione del problema 7.** Acquistando il massimo numero possibile di torte (cioè 7), restano 2€ con cui si possono fare due tipi di acquisto diversi: 1 pasticcino; 2 biscotti al cioccolato. Rinunciando a 1 torta, restano 13€ che permettono di acquistare al massimo 6 pasticccini; rinunciando a 2 torte, restano 24€ che permettono di acquistare al massimo 12 pasticccini; e così via come nella tabella

| torte | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| massimo numero di pasticcini | 1 | 6 | 12 | 17 | 23 | 28 | 34 | 39 |

La risposta è 0168.

**Soluzione del problema 8.** Le cifre sono 38894. La risposta è 8894.

**Soluzione del problema 9.** Scriviamo $124 = 4n$, cioè $n = 31$, e $k$ al psto di 1000. Poniamo $a$ e $b$ le lunghezze dei lati del rettangolo. Allora sappiamo che il perimetro è $2\cdot(a+b) = 4n+4$ e che l'area è $a\cdot b > k$. Per massimizzare l'area dobbiamo usare la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica che ci dice che $a\cdot b \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, e richiedere che si verifichi l'uguaglianza che si ha quando $a = b = n+1$. La risposta è 0024.

**Soluzione del problema 10.** Sono soltanto 5 se ordinati dal minore al maggiore: $(18,18,63)$, $(18,27,54)$, $(18,36,45)$, $(27,27,45)$ e $(27,36,36)$. In totale sono $3+6+6+3+3$. La risposta è 0021.

**Soluzione del problema 11.** Due casi dei tre non capitano mai contemporaneamente: dati tre numeri $a$, $b$ e $c$ compresi tra 1 e 100, se ad esempio $a+b = c$ e $b+c = a$, allora $b$ deve essere 0. Perciò le coppie $(a,b)$ tali che $1 < a+b \le 101$ sono $1+2+\ldots+99 = 50\cdot 99$. La probabilità cercata è $\frac{3\cdot 50\cdot 99}{100^3} = 0{,}01485$. La risposta è 0148.

**Soluzione del problema 12.** Devo scegliere tre elementi tra 9, poi altri tre elementi tra 6: $\binom{9}{3}\binom{6}{3}$. La risposta è 1680.

**Soluzione del problema 13.** $M\hat{L}N = 180^\circ-(180^\circ-2B\hat{A}C)-(180^\circ-2A\hat{B}C) = 180^\circ-2A\hat{C}B = 96^\circ$. Poiché $O$ è il centro della circonferenza circoscritta a $MNC$, allora $N\hat{O}M = 2A\hat{C}B = 84^\circ$, il quadrilatero $LMON$ è inscrivibile in una circonferenza e, dato che il triangolo $MON$ è isoscele in quanto $MO = ON$ sono raggi della circonferenza, allora risulta $O\hat{L}M = O\hat{N}M = O\hat{M}N = N\hat{L}O$. Dunque $LO$ è bisettrice dell'angolo $M\hat{L}N$. La risposta è 0048.

**Soluzione del problema 14.** La somma delle $n$ pagine di un libro è $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Dato che $\sqrt{2\cdot 22000}\approx 209$, si vede che $\binom{210}{2} = 21945$ e $\binom{211}{2} = 22155$. La somma delle pagine strappate è 155, cioè il foglio con le pagine 77 e 78. La risposta è 0210.

**Soluzione del problema 15.** Si chiamino $A$ la faccia di area $25\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm}$, $B$ quella $25\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$ e $C$ quella $30\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$. Si denotino con $A_1$, $B_1$ e $C_1$ le aree di uno dei quattro rettangoli non coperti dal nastro di ciascuna delle tre facce. Si ha dunque che

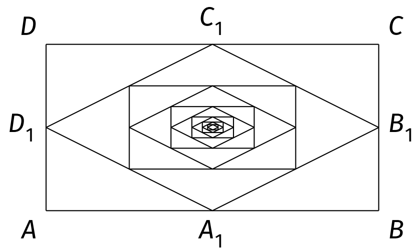
$$A_1 = \frac{25-3}{2} \times \frac{30-7}{2} = 126{,}5\,\mathrm{cm}^2$$

$$B_1 = (25-3) \times (50-3) \times \frac{1}{4} = 258{,}5\,\mathrm{cm}^2$$

$$C_1 = (30-7) \times (50-3) \times \frac{1}{4} = 270{,}25\,\mathrm{cm}^2$$

Il risultato richiesto risulta pertanto essere $8(A_1 + B_1 + C_1)$. La risposta è 5242.

**Soluzione del problema 16.** Siano $a = 24\,\mathrm{m}$ e $b = 48\,\mathrm{m}$. Il quadrilatero $A_1B_1C_1D_1$ è un parallelogramma, perché i lati $A_1B_1$ e $C_1D_1$ sono entrambi paralleli ad $AC$ e misurano entrambi metà della lunghezza di $AC$, allo stesso modo $B_1C_1$ e $D_1A_1$ sono metà di $BD$, quindi il perimetro di $A_1B_1C_1D_1$ sarà esattamente la somma delle lunghezze delle due diagonali. L'argomento si ripete per il successivo quadrilatero, che ha il perimetro uguale alla somma delle diagonali di $A_1B_1C_1D_1$, che misurano esattamente $a$ e $b$, così il perimetro del parallelogramma si dimezza. Quindi il perimetro di $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$ è $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2^4} = \frac{\sqrt{2880}}{2^4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ m. La risposta è 3354.




**Soluzione del problema 17.** Sia $p = \frac{2}{3}$; sia $q$ la probabilità che Sinner vinca nel momento in cui i due giocatori stanno pareggiando ed hanno almeno 3 punti a testa. Allora

$$q = p^2 + p(1-p)q + (1-p)pq = p^2 + 2p(1-p)q \tag{1}$$

da cui si ricava che $q = \frac{p^2}{1-2p(1-p)}$. Partendo dall'inizio del gioco, le probabilità che Sinner vinca 4 punti a 0 (vinca il gioco "a 0"), 4 a 1 (vinca il gioco "a 15"), 4 a 2 (vinca il gioco "a 30"), sono rispettivamente $p^4$, $4p^4(1-p)$ e $10p^4(1-p)^2$. Invece la probabilità che si arrivi al punteggio di 3 punti a 3 ("40 pari") è $20p^3(1-p)^3$. Questo esaurisce tutti i casi, pertanto la risposta è $p^4 + 4p^4(1-p) + 10p^4(1-p)^2 + 20p^3(1-p)^3q \approx 0{,}85596$. La risposta è 8559.

**Soluzione del problema 18.** Moltiplicando $n$ per 99, risulta $99n = 9999\ldots999 = 10^{2k} - 1 = (10^k+1)(10^k-1)$. Se $n$ è primo, deve dividere $10^k + 1$ oppure $10^k - 1$. Per $k > 2$, i numeri $10^k + 1$ e $10^k - 1$ sono maggiori di 99. Si vede del resto che $k = 2$ corrisponde effettivamente al numero primo 101. La risposta è 0001.

**Soluzione del problema 19.** Si osservi che ogni numero scritto in base $b$ ha la stessa classe di resto modulo $b-1$ della sua somma delle cifre, dato che il resto di $b$ è 1. Quindi le condizioni scritte sul foglietto corrispondono al seguente sistema di congruenze

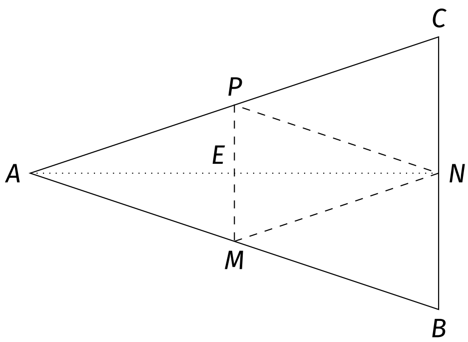
$$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{10} \\ n \equiv 0 \pmod{28} \\ n \equiv 2 \pmod{6} \\ n \equiv 8 \pmod{14} \\ n \equiv 0 \pmod{35} \\ n \equiv 8 \pmod{18} \\ n \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Le uniche equazioni incompatibili sono la seconda e la quinta con la quarta, osservando il resto della divisione per 7; la seconda con la settima, osservando il resto della divisione per 4; la prima con la quinta, osservando il resto della divisione per 5. Dato che dobbiamo scegliere cinque equazioni compatibili l'unica possibilità è escludere la seconda e la quinta. Si conclude utilizzando il teorema cinese dei resti. La risposta è 0386.

**Soluzione del problema 20.** Siano $PM = 2b$ e $NE = h$. Sia $AB = 2\ell = AC$. Perciò $\ell^2 = b^2 + h^2$. L'area della base $MNP$ del tetraedro è $bh$. L'altezza del tetraedro è l'altezza $k$ relativa alla base $EN$ della sezione triangolare $AEN$ ottenuta tagliando il tetraedro con il piano passante per il vertice $A$ (che coincide con $C$ e con $B$) e il segmento $EN$. Nel triangolo $AEN$ l'altezza relativa alla base $BN$ (che coincide con lo spigolo $CN$) è $\sqrt{h^2 - b^2}$; l'area di $AEN$ è $b\sqrt{h^2 - b^2}$ e $k = \frac{2b\sqrt{h^2-b^2}}{h}$. Dunque il volume del tetraedro è

$$\frac{1}{3}bhk = \frac{2}{3}b^2\sqrt{h^2 - b^2} = \frac{2}{3}b^2\sqrt{\ell^2 - 2b^2}.$$

La risposta è 0408.



**Soluzione del problema 21.** Data una lista $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ di numeri naturali, si scrive $\ell(\alpha) = m$ per la lunghezza della lista e $\Sigma\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i$ per la somma dei numeri della lista. Per $n \in \mathbb{Z}$ sia $A_n = \left\{\alpha \,\middle|\, \Sigma\alpha = n, \forall_{i<\ell(\alpha)} \alpha_i \neq \alpha_{i+1}\right\}$, di conseguenza $a_n = \#A_n$. Si vede facilmente che $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 7$, $a_6 = 14$, $a_7 = 23$; inoltre $a_n = 0$ per $n \leq 0$. Fissato $k$ siano

$$C_{n,k} = \left\{\alpha \in A_n \,\middle|\, \alpha_{\ell(\alpha)} = k\right\} \qquad B_{n,k} = A_n \setminus C_{n,k} = \left\{\alpha \in A_n \,\middle|\, \alpha_{\ell(\alpha)} \neq k\right\}.$$

Posti $c_{n,k} = \#C_{n,k}$ e $b_{n,k} = \#B_{n,k}$, è perciò $a_n = b_{n,k} + c_{n,k}$ per ogni $k$. Inltre $c_{n,k} = 0$ e $b_{n,k} = a_n$ per $n < k$, anche $a_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k}$. Si noti ora che, se $(\alpha, k) \in A_n$, allora $\alpha \in A_{n-k}$ e $\alpha_{\ell(\alpha)} \neq k$. Cioè, $(\alpha, k) \in C_{n,k}$ se e solo se $\alpha \in B_{n-k,k}$, che produce una biezione tra $C_{n,k}$ e $B_{n-k,k}$ e dimostra che $c_{n,k} = b_{n-k,k}$. Dunque

$$\begin{aligned}
a_n &= \textstyle\sum_{k\leq n} b_{n-k,k} = \sum_{k\leq n}(a_{n-k} - c_{n-k,k}) = \sum_{k\leq n}(a_{n-k} - b_{n-2k,k}) = \sum_{k\leq n} a_{n-k} - \sum_{2k\leq n} b_{n-2k,k} \\
&= \textstyle\sum_{k\leq n} a_{n-k} - \sum_{2k\leq n}(a_{n-2k} - c_{n-2k,k}) = \sum_{k\leq n} a_{n-k} - \sum_{2k\leq n}(a_{n-2k} - b_{n-3k,k}) \\
&= \textstyle\sum_{k\leq n} a_{n-k} - \sum_{2k\leq n} a_{n-2k} + \sum_{3k\leq n} b_{n-3k,k} = \sum_{k\leq n} a_{n-k} - \sum_{2k\leq n} a_{n-2k} + \sum_{3k\leq n}(a_{n-3k} - c_{n-3k,k}) = \dots = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{jk\leq n} a_{n-jk}.
\end{aligned}$$

Così
$$\begin{aligned}
a_{15} &= (a_{14} - a_{13} + a_{12} - a_{11} + a_{10} - a_9 + a_8 - a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0) + \\
&\quad + (a_{13} - a_{11} + a_9 - a_7 + a_5 - a_3 + a_1) + (a_{12} - a_9 + a_6 - a_3 + a_0) + (a_{11} - a_7 + a_3) + \\
&\quad + (a_{10} - a_5 + a_0) + (a_9 - a_3) + (a_8 - a_1) + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\
&= a_{14} + 2a_{12} - a_{11} + 2a_{10} + 2a_8 - 2a_7 + 3a_6 + 2a_4 - 2a_3 + 2a_2 + 4a_0 \\
&= 1152 + 2\cdot 378 - 214 + 2\cdot 124 + 2\cdot 39 - 2\cdot 23 + 3\cdot 14 + 2\cdot 4 - 2\cdot 3 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1.
\end{aligned}$$
La risposta è 2024.