Università di Genova

Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\sqrt{3} = 1{,}7321$ $\sqrt{5} = 2{,}2360$ $\pi = 3{,}1415$.

Scadenze importanti

- **15 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata attraverso il modulo di consegna.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani attraverso il canale previsto.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Fake News Today

Un giornale VERO

Gli scienziati sono tutti imbroglioni! Il loro strumento principale è la matematica che si dichiara da sola contraddittoria e nessuno ce lo dice! Nella realtà non c'è niente certo al 100%. Come fanno i teoremi a essere verità inconfutabili? Nelle loro stesse ammissioni un fatto con probabilità del 30% è possibile. E un fatto con probabilità del 99% è praticamente certo. Applicando la loro definizione ***aristotelica*** di essere razionale potrebbero dimostrare che un fatto che è praticamente certo di essere praticamente certo è praticamente certo. Ma non lo fanno! Gli stessi matematici spiegherebbero con i loro calcoli che un tale fatto ha probabilità 98%! Basta continuare a ripetere e ripetere stolidamente—proprio come i matematici ***non*** fanno—la frase precedente per scoprire che un fatto possibile è praticamernte certo. Questo giornale si basa su questa constatazione—che quelli come noi che non si lasciano bullizzare dalla scienza conoscevano prima che i matematici ce lo nascondessero! **BUONA LETTURA!**

Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi[1]

{1} IL CONCESSIONARIO

di Lorenzo Mazza

Un concessionario di automobili rischia di perdere i suoi clienti perché mostra i prezzi delle auto in vendita usando artifici matematici. Ad esempio, il prezzo di un auto è scritto come

$$\begin{array}{r} \text{XYZZZ€} + \\ \text{1€} = \\ \hline \text{XXYYY€} \end{array}$$

Se un cliente gli chiede il significato di X, Y e Z, il concessionario gli spiega che a ciascuna lettera corrisponde una cifra. Il concessionario concede uno sconto del 10% sul prezzo che è il totale della somma a chi lo determina da solo. Quanto è il prezzo scontato dell'esempio?

{2} SOFFITTI QUADRATI

di Giuseppe Rosolini

Ho trovato un soffitto quadrato decorato con otto travi uguali. Ciascuna congiunge il centro del soffitto con uno dei muri laterali. Il soffitto risulta così diviso in otto aree uguali. Il lato della stanza è di 10 m. Qual è la lunghezza in mm di una delle otto travi?

È facile misurare la lunghezza con un metro senza fare calcoli inutili.

{3} A BRUCIAPELO

di Sandro Campigotto

Quanto vale $\dfrac{2022^3 - 2000^3 - 22^3}{2022 \cdot 2000}$?

Non c'è che fare i calcoli.

{4} DIVISORI INIZIATI

di Andrea Giusto

Quante sono le coppie ordinate (a, b) di interi positivi la cui somma $a + b$ è minore di 2023 e tali che

- a è un divisore di $2b$;
- b è un divisore di $2a$, ma
- a non è un divisore di $a + b$ oppure b non è un divisore di $b + a$?

Nonostante il linguaggio per iniziati, basta fare due prove non banali con 1 e 3.

{5} FATTORIALE DI ZERI

di Sandro Campigotto

Con quanti zeri termina il fattoriale 40! scritto in base 12?

Questo problema non serve perché nessuno scrive in base 12. Ma la soluzione è facile.

{6} MAGLIETTE DIVERSE

di Sandro Campigotto

Quattro amici indossano una maglietta, ciascuno con il proprio nome sopra. Decidono di scambiarsi le magliette in modo che nessuno indossi la maglietta con il proprio nome e di mettersi in fila per farsi una foto. In quanti modi possono organizzarsi per la foto, scambiandosi magliette e mettendosi in fila?

Ma la domanda reale dietro a tutto questo è: per quale motivo lo fanno. E i matematici non provano neppure a rispondere.

[1] Raccogliamo articoli della rubrica Che cosa direbbe un matematico. Pongono problemi e i numeri tra parentesi graffe sono ordinali crescenti che indicano la risposta possibile che un matematico non darebbe.

{7} MAZZI DI CARTE

di Cecilia Oliveri

Un mazzo di 10 carte è formato da 5 coppie di carte uguali. Mischiando il mazzo e dividendolo in cinque coppie di carte, qual è la probabilità che le carte di ciascuna coppia siano uguali tra loro? Questo solitario non prenderà mai piede.

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

{8} QUADRATI DI NUMERI

di Lorenzo Mazza

Un numero naturale a è formato da n cifre, mentre il suo quadrato a^2 possiede m cifre. Qual è il minimo valore di n tale che $n + m = 2022$? È chiaro a che cosa potrà servire questo problema quando l'anno 2022 finirà.

{9} TRAPEZI A CORONA

di Sandro Campigotto

Alcuni trapezi isosceli sono stati appoggiati sul tavolo, affiancati uno all'altro condividendo un lato obliquo in modo che ogni base minore sia consecutiva ad altre due basi minori. I trapezi sono tutti uguali: la base maggiore di un trapezio misura 50 cm; la base minore misura 20 cm; gli angoli acuti sulla base maggiore misurano 81°. Quanti sono i trapezi utilizzati?

{10} PRODOTTI MULTIPLI

di Sandro Campigotto

Per quante quintuple ordinate (x, y, z, k, t) di cifre accade che la divisione per 1000 del prodotto $x \times y \times z \times k \times t$ è un numero intero positivo?

{11} NEL XXI SECOLO

di Lorenzo Mazza

Il giorno 02/12/22 (2 dicembre 2022) gode di una particolare proprietà: i tre numeri che descrivono la data (rispettivamente nell'ordine: giorno, mese e ultime due cifre dell'anno) sono in progressione aritmetica, cioè la differenza fra due numeri consecutivi è la stessa—nell'esempio, la differenza fra due numeri consecutivi è 10; li si descrive appunto come "numeri in progressione aritmetica di ragione 10". Quanti sono, nel XXI secolo, le date che godono della medesima proprietà?

{12} DISPARITÀ

di Matteo Littardi

Sia A l'insieme dei numeri interi positivi minori di 51. Sia N il numero delle permutazioni di A tali che, per ogni p primo e m e n interi positivi con $m < n$, il numero p^m compare prima di p^n nella permutazione. Qual è il massimo valore di t naturale tale che 2^t divide N?
Chi è riuscito a leggere fino a qui, trova subito la soluzione e che $\frac{N}{2^t}$ è dispari.

{13} PROVE DI VERITÀ

di Silvia Sconza

Si considerino le seguenti proprietà numeriche:

a) n è divisibile per 7 oppure $n \geq 1231$;
b) n è un quadrato perfetto;
c) $n < 1674$ e n è divisibile per 5.

Quanti sono i numeri n compresi tra 1 e 2022, estremi inclusi, tali che n verifica almeno una delle precedenti proprietà e ne falsifica almeno una?

{14} TRIPLO PALINDROMO *di Anna Ulivi*

Il più piccolo numero che si può scrivere come numero palindromo di 3 cifre in tre basi diverse è 121. Qual è il più grande numero inferiore a 121 che si scrive come numero palindromo di tre cifre in due basi diverse?
La parola "palindromo" si riferisce a una lista che, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista. Ad esempio, `radar` è palindromo; `drone` non è palindromo; `2020` non è palindromo; `2002` è palindromo.

{15} CERCHI QUADRATI *di Cecilia Oliveri*

Sia dato un quadrato al cui interno sono costruite 204^2 circonferenze uguali affiancate l'una all'altra senza sovrapposizioni. Sono disposte come segue: 4 circonferenze sono tangenti a due lati e ad altre due circonferenze; 808 circonferenze sono tangenti a un solo lato e ad altre due circonferenze; tutte le altre circonferenze non sono tangenti a un lato del quadrato, ma sono tangenti a altre quattro circonferenze. Vi sono in aggiunta altre circonferenze più piccole uguali di raggio $12\,\text{cm}$, ciascuna di queste tangente a quattro circonferenze grandi. Qual è il rapporto tra l'area coperta dai cerchi e l'area del quadrato?
Visto che manca il dato del raggio delle circonferenze grandi, si può soltanto indovinare quale possa essere la risposta.

[*Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola del rapporto.*]

{16} BICCHIERI E PIRAMIDI *di Sandro Campigotto*

Venti bicchieri cilindrici identici, sono posizionati a formare una piramide in modo che un bicchiere poggi su tre bicchieri sottostanti. Ce ne sono così 10 al primo livello, 6 al secondo livello, poi 3, poi 1. Un rubinetto gocciola con una portata di $1\,\text{l/h}$ esattamente sopra al bicchiere più alto della piramide. Ogni bicchiere ha un volume di $80\,\text{cm}^3$. Quando l'acqua traborda da un bicchiere goggiola uniformemente nei tre bicchieri sottostanti. Dopo quanti secondi un bicchiere del primo livello sarà pieno d'acqua?
Questo problema, così rilevante alle cerimonie importanti, è chiaramente impostato in modo errato dai matematici: c'è da chiedersi se hanno pensato che i bicchieri devono essere dotati di opportune scanalature che permettono all'acqua di defluire senza sbavare. E che nessuno pensa di usare acqua, ma spumante.

{17} PAVIMENTO QUADRATO *di Giuseppe Rosolini*

Un pavimento quadrato è stato ricoperto usando piastrelle rettangolari (due lati perpendicolari di una piastrella hanno lunghezze diverse) di area $450\,\text{cm}^2$, tagliandone il minor numero possibile per coprire completamente il pavimento. Una rotazione del quadrato di $90°$ rispetto al centro non modifica il disegno delle piastrelle.
Le piastrelle era state consegnate in scatole da 30 piastrelle ciascuna. Di 79 scatole sono state utilizzate tutte le 30 piastrelle, ma è stato necessario aprire un'altra scatola per completare la pavimentazione.
Quanti centimetri è lungo il lato della stanza?
Senza calcoli si misura camminando a passi regolari lungo uno dei muri.

{18} PACCHETTI CILINDRICI *di Giuseppe Rosolini*

Quattro cilindri uguali, con diametro di base di $20\,\text{cm}$ e altezza di $25\,\text{cm}$ sono impacchettati insieme in modo che le basi siano tutte appoggiate sul tavolo. Il pacchetto avvolge completamente i quattro cilindri. Qual è l'area totale minima del pacchetto?

{19} BILIARDO ESAGONALE

di Anna Ulivi

Un tavolo da biliardo ha forma di esagono regolare di lato 120 cm con buche nei sei angoli. Un giocatore colpisce molto forte una pallina posizionata proprio davanti a una delle buche. Il primo rimbalzo della palla è a 40 cm dalla buca diametralmente opposta. Dopo quanti rimbalzi entrerà in una buca?

{20} MATEMATICI TRUFFATORI

di Giuseppe Rosolini

Due squadre di tre giocatori si affrontano in un puro gioco d'azzardo. L'arbitro ha a disposizione francobolli gialli e francobolli verdi in quantità sovrabbondante.
Ad ogni turno di gioco, ne mette uno a caso sulla fronte di ciascun giocatore. Ciascun giocatore può vedere i francobolli sulla fronte dei compagni, e deve cercare di indovinare il colore del francobollo che ha sulla propria fronte; quindi scrive su un foglio il colore che sta indovinando oppure scrive la frase «NON LO SO». Una squadra fa punto quando tutti i suoi giocatori che non scrivono «NON LO SO» indovinano il colore e almeno uno dei giocatori scrive un colore. Vince la squadra che, dopo trenta turni, fa più punti.
La squadra sponsorizzata da **FNT** gioca con la strategia più certa: Giorgio, che è il più sicuro dei tre, dichiara un colore che sceglie in base alle sue convinzioni possibili; Giancarlo e Giuseppe scrivono comunque «NON LO SO». Purtroppo, dopo trenta turni, l'altra squadra, composta da sediziosi "matematici", vince con un numero di punti che fa pensare alla truffa.
Alla conferenza stampa, l'unica affermazione che i tre "matematici" continuano a ripetere è: «Abbiamo semplicemente giocato la strategia migliore possibile.»
Ammesso che tale strategia esista, qual è la probabilità che un turno sia finito 1 punto a 0 per la squadra dei matematici contro la squadra di **FNT**?

[*Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola della probabilità.*]

{21} SCATOLE DI MONETE

di Matteo Littardi

Sono disponibili 3 scatole vuote e 50 monete. Una mossa consiste di quattro azioni combinate:

1. scegliere una scatola delle tre;
2. mettere due monete nella scatola;
3. scegliere un'altra scatola;
4. mettere una moneta in questa.

Quante sono le sequenze di mosse che producono come risultato finale che ciascuna delle tre scatole contenga 6 monete?
Bisogna stare attenti che i matematici non perdano le 18 monete nelle scatole mentre cercano di risolvere il problema.

Gara di matematica a squadre femminile 2022
Soluzioni

Università di Genova

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, insieme a Sandro Campigotto e Lorenzo Mazza, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Andrea Giusto, Matteo Littardi, Cecilia Oliveri, Silvia Sconza, Anna Ulivi.
Sono tutti ex-giocatori iscritti a corsi di studi presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. Poiché XXYYY=XYZZZ+1, la seconda cifra da sinistra di XYZZZ può cambiare soltanto per un riporto. Così Z + 1 = 10, e Z = 9, Y = 0 e X = 1.
La risposta è `9900`.

Soluzione del problema 2. I punti di intersezione delle travi con i muri sono le intersezioni di una circonferenza centrata nel centro del quadrato e il quadrato. I poligoni sono quattro triangoli isosceli e quattro quadrilateri, ciascuno ottenuto come unione di due triangoli isosceli con base comune. Scritto ℓ per la lunghezza del lato, l'area del triangolo isoscele è $\frac{\ell^2}{8}$. L'altezza del triangolo isoscele è $\frac{\ell}{2}$; così la base del triangolo isoscele è $\frac{\ell}{2}$. Il lato obliquo è dunque $\frac{\ell\sqrt{5}}{4} = \frac{5\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{m} \approx 5{,}5902\,\mathrm{m}$.
La risposta è `5590`.

Soluzione del problema 3. Riscriviamo il numeratore completando il cubo tra i primi due termini

$$2022^3 - 2000^3 - 22^3 = (2022 - 2000)^3 - 3 \cdot 2022 \cdot 2000^2 + 3 \cdot 2022^2 \cdot 2000 - 22^3,$$

A questo punto il calcolo da svolgere diventa

$$\frac{-3 \cdot 2022 \cdot 2000^2 + 3 \cdot 2022^2 \cdot 2000}{2022 \cdot 2000} = -3 \cdot 2000 + 3 \cdot 2022 = 66,$$

La risposta è `0066`.

Soluzione del problema 4. Le prime due condizioni assicurano che $ak = 2b$ e $bh = 2a$ per opportuni h e k. Ma $4ak = 2bhk = ak^2h$. Dunque $4 = kh$. Dato che la negazione della terza condizione è equivalente a chiedere che $a = b$, deve essere $h \neq k$. Così $a = 2b$ oppure $b = 2a$. A questo punto, la condizione che $a + b \leq 2022$ è soddisfatta se e solo se $3\min(a, b) \leq 2022$, cioè $\min(a, b) \leq 674$. Perciò il numero di coppie cercate è $674 \times 2 = 1348$.
La risposta è `1348`.

Soluzione del problema 5. Nel prodotto 40! compaiono $\left[\frac{40}{3}\right] = 13$ multipli di 3 di cui $\left[\frac{40}{9}\right] = 4$ multipli di $9 = 3^2$ e $\left[\frac{40}{27}\right] = 1$ multiplo di $27 = 3^3$. La massima potenza 3^k di 3 tale che $3^k \div 40!$ è per $k = 18$. Anche se è chiaro che la massima potenza di 4 che divide 40! è maggiore di 18, nel prodotto 40! compaiono anche $\left[\frac{40}{2}\right] = 20$ multipli di 2 di cui $\left[\frac{40}{4}\right] = 10$ multipli di 4, $\left[\frac{40}{8}\right] = 5$ multipli di 8, $\left[\frac{40}{16}\right] = 2$ di 16, e $\left[\frac{40}{32}\right] = 1$ di 32. La massima potenza di 2 che divide 40! è $20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 38$. Dunque la massima potenza 4^h di 4 tale che $4^h \div 40!$ è 19. Dato che 3 e 4 sono primi tra loro la massima potenza di 12 che divide 40! è 18.

La risposta è `0018`.

Soluzione del problema 6. Gli scambi di maglietta sono tanti quante le permutazioni di $n = 4$ elementi senza punti fissi $\sum_{i=0}^{n} \dfrac{(-1)^i n!}{i!}$. Le posizioni dei quattro in fila sono tante quante le permutazioni di quattro elementi. Perciò i modi sono $4! \cdot \sum_{i=0}^{4} \dfrac{(-1)^i 4!}{i!} = 216$.
La risposta è `0216`.

Soluzione del problema 7. Si calcoli la probabilità come il numero di casi favorevoli diviso il numero di casi possibili. Di casi favorevoli ne esiste soltanto uno mentre i casi possibili sono tutti i modi in cui si possono dividere 10 carte in 5 coppie. La prima coppia può essere scelta in $\binom{10}{2}$ modi, la seconda in $\binom{8}{2}$, la terza in $\binom{6}{2}$, la quarta in $\binom{4}{2}$ e l'ultima solo in un modo. Inoltre, poiché non conta l'ordine delle coppie, questo numero va diviso per il numero di permutazioni delle coppie, cioè $5!$. Il numero di casi possibili risulta quindi essere

$$N = \frac{10!}{2!8!} \frac{8!}{2!6!} \frac{6!}{2!4!} \frac{4!}{2!2!} \frac{1}{5!} = \frac{10!}{2^5 5!} = 945.$$

Dunque la probabilità vale $\frac{1}{945}$.
La risposta è `0946`.

Soluzione del problema 8. L'ipotesi su a comporta che $10^{n-1} \leq a < 10^n$, da cui $10^{2n-2} \leq a^2 < 10^{2n}$. Pertanto gli unici valori che può assumere m saranno $2n-1$ oppure $2n$, da cui la somma $n+m$ vale $3n-1$ oppure $3n$. Dato che 2022 è divisibile per 3 deve essere $n+m = 3n$ e $3n = 2022$. Dunque $n = 674$.
La risposta è `0674`.

Soluzione del problema 9. Per un poligono regolare di n lati, la somma degli angoli interni è $(n-2)180°$. Vista la posizione dei trapezi l'angolo del poligono è $162°$: la somma degli angoli interni è dunque $n \cdot 162°$. Perciò $n = 20$.
La risposta è `0020`.

Soluzione del problema 10. Dato che $1000 = 2^3 5^3$, il prodotto $x \times y \times z \times k \times t$ è multiplo di 1000 quando tre componenti sono 5, e il prodotto delle altre due è multiplo di 8. Questo accade nei seguenti casi, tra loro esclusivi.

- Una cifra è 8 e l'altra è diversa da 8, 4 e 5: sono $6\dfrac{5!}{3!}$ quintuple.
- Una cifra è 8 e l'altra è 5: sono $\dfrac{5!}{4!}$ quintuple.
- Una cifra è 8 e l'altra è 4: sono $\dfrac{5!}{3!}$ quintuple.
- Una cifra è 4 e l'altra è pari, ma diversa da 8 e da 4: sono $2\dfrac{5!}{3!}$ quintuple.
- Le due cifre sono entrambe 4 oppure entrambe 8: sono $2\dfrac{5!}{2!3!}$ quintuple.

In totale sono $10\dfrac{5!}{3!} + \dfrac{5!}{4!} = 205$.
La risposta è `0205`.

Soluzione del problema 11. Le triple da contare sono $(x, x+h, x+2h)$ in progressione aritmetica di ragione h. La prima componente è limitata da $1 \leq x \leq 31$, la seconda da $1 \leq x+h \leq 12$, e la terza da $0 \leq x+2h \leq 99$—vista la scrittura dell'anno, è irrilevante considerare il XXI secolo a partire dall'anno 2000 e terminare nell'anno 2099 oppure a partire dall'anno 2001 e terminare nell'anno 2100. Ne segue che $0 - 12 = -12 \leq h \leq 11 = 12 - 1$.

Conviene notare che i casi anomali per $x = 29, 30, 31$ (giorni che compaiono soltanto in certi mesi dell'anno) non si presentano perchè, per questi valori di x, non ci sono valori possibili di h tali che $x + h \leq 12$.
Si nota anche una simmetria tra le date $(x, x+h, x+2h)$ e $(x+2h, x+h, x)$, esclusi i casi in cui l'anno è 00. Conviene rielencare le date come $(y-h, y, y+h)$ al variare di y tra 1 e 12. Si nota ora che, se $(y-(h+1), y, y+(h+1))$ è una data in progressione aritmetica (di ragione $h+1$), allora anche $(y-h, y, y+h)$ è una data in progressione aritmetica (di ragione h). Il viceversa vale se e solo se $y - h > 1$. Dunque le date in progressioni aritmetica di ragione h sono una in più delle date in progressione aritmetica di ragione $h+1$. Visto che ce ne sono 12 in progressione aritmetica di ragione 0, le date richieste sono $2 \cdot \sum_{k=0}^{11}(12-k) = 156$.
La risposta è `0156`.

Soluzione del problema 12. Il numero totale delle permutazioni di A è $50!$. Dato che le potenze di 2 minori di 50 sono 2, 4, 8, 16 e 32, possiamo partizionare le permutazioni di A in $5!$ insiemi distinti a seconda dell'ordine in cui compaiono le potenze di 2 (per esempio ci sarà un'insieme dove le potenze appaiono nell'ordine $2, 4, 8, 16, 32$, uno nell'ordine $4, 2, 8, 16, 32$, ecc.). Ogni insieme contiene lo stesso numero di permutazioni, che quindi sono $\frac{50!}{5!}$. Le permutazioni richieste dal problema sono nell'insieme in cui le potenze sono in ordine, che possiamo suddividere nuovamente in $3!$ sottoinsiemi dato che le potenze di 3 minori di 50 sono 3, 9 e 27; ciascun sottoinsieme ha $\frac{50!}{5!3!}$ elementi e tutte le permutazioni che ci interessano sono nello stesso. Iterando il processo con i primi fino a 7 otteniamo che $N = \frac{50!}{5!3!2!2!}$. Visto che $50!$ ha 25 fattori pari, 12 fattori multipli di 4, 6 fattori multipli di 8, 3 fattori multipli di 16 e 1 fattore 32, e $5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$ la risposta è $25 + 12 + 6 + 3 + 1 - 6 = 41$.
La risposta è `0041`.

Soluzione del problema 13. Calcoliamo quanti sono i numeri tra 1 e 2022 che non soddisfano le condizioni richieste dalla domanda, cioè i numeri che soddisfano tutte e tre le proprietà oppure non ne soddisfano nessuna.
Cominciamo col primo caso: i numeri n interi positivi che verificano tutte e tre le proprietà sono intanto strettamente minori di 1647. Tra gli $1231 \leq n < 1674$ l'unico numero è $40^2 = 1600$. Tra gli $1 \leq n < 1231$, l'unico numero accettabile è $35^2 = 1225$. In tutto, ci sono solo due numeri che verificano tutte e tre le condizioni.
Passiamo al secondo caso: se n rende tutte le proprietà false, vuol dire che
- 7 non divide n e $n < 1231$;
- n non è un quadrato perfetto;
- $n \geq 1674$ oppure 5 non divide n.

Osserviamo subito che dobbiamo considerare solo l'insieme X dei numeri interi positivi minori strettamente di 1231. Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di X:

$$A = \{n \in X \mid 7|n\} \quad B = \left\{n \in X \mid \exists_{m \in \mathbb{N}}\, n = m^2\right\} \quad C = \{n \in X \mid 5|n\}.$$

Per calcolare la cardinalità di $X \setminus (A \cup B \cup C)$ applichiamo il principio di inclusione ed esclusione:

$$\begin{aligned} &|A| = 175 \quad |B| = |\{m^2 \mid 1 \leq m \leq 35\}| = 35 && |C| = 246 \\ &|A \cap B| = |\{(7m)^2 \mid 1 \leq m \leq 5\}| = 5 && |A \cap C| = |\{n \in X \mid 35 \mid n\}| = 35 \\ &|B \cap C| = |\{(5m)^2 \mid 1 \leq 7\}| = 7 && |A \cap B \cap C| = |\{35^2\}| = 1, \end{aligned}$$

Quindi $|X \setminus (A \cup B \cup C)| = 1230 - 175 - 35 - 246 + 5 + 35 + 7 - 1 = 820$.
Ricapitolando, in totale i numeri che non sono richiesti dalla domanda sono $820 + 2 = 822$; di conseguenza $2022 - 822 = 1200$ sono i numeri cercati.
La risposta è `1200`.

Soluzione del problema 14. Un numero x palindromo di 3 cifre scritto in base b è tale che $b^2 < x < b^3$. Per le richieste del problema il numero cercato deve essere maggiore di 26 e minore di 121.

Dato che il primo palindromo di tre cifre in base 11 è 122, le due basi sono minori di 11. L'elenco dei numeri palindromi di tre cifre in base b è $xb + y(b^2 + 1)$ al variare di x da 0 a $b - 1$ e di y da 1 a $b - 1$.
Per le prime basi possibili 4, 5 e 6 l'elenco è

base 4				base 5					base 6					
17	21	25	29	26	31	36	41	46	37	43	49	55	61	67
34	38	42	46	52	57	62	67	72	74	80	86	92	98	104
51	55	59	63	78	83	88	93	98	111	117	123	...		
				104	109	114	119	124						

che mostrano 104 come migliore candidato. Per controllare se si può ottenere un numero maggiore che soddisfi la richiesta del problema basta elencare i numeri superiori a 100 e inferiori a 121 che sono palindromi nelle basi rimanenti:
base 7: 107 114 121
base 8: 105 113 121
base 9: 100 109 118
base 10: 101 111 121
La risposta è `0114`.

Soluzione del problema 15. Si scriva a per 204. Siano R e r rispettivamente i raggi delle circonferenze grandi e delle circonferenze piccole. Per costruzione nel quadrato compaiono $(a-1)^2$ circonferenze piccole. Il lato l del quadrato è uguale a $2Ra$, quindi la sua area totale è data da $Q = (2Ra)^2$. L'area di un cerchio grande è $G = \pi R^2$. Considerati un cerchio piccolo e i quattro cerchi grandi tangenti ad esso, si ha che $2R+2r = 2R\sqrt{2}$. Dunque $r = R(\sqrt{2}-1)$. L'area di un cerchio piccolo è $P = \pi R^2(3 - 2\sqrt{2})$. L'area occupata dai cerchi è

$$T = a^2G + (a-1)^2P = \pi(a^2R^2 + (a-1)^2R^2(3-2\sqrt{2})) = \pi R^2 \left[a^2 + (a-1)^2(3-2\sqrt{2})\right].$$

Il rapporto cercato è

$$\frac{T}{Q} = \frac{\pi\left[a^2 + (a-1)^2(3-2\sqrt{2})\right]}{4a^2} = \frac{\pi}{4}\left[1 + \left(\frac{a-1}{a}\right)^2(3-2\sqrt{2})\right] \approx 0{,}91883.$$

La risposta è `9188`.

Soluzione del problema 16. Sia $v = 1\,\mathrm{l/h}$. Sia $c = 80\,\mathrm{ml}$. Il tempo per riempire il bicchiere al livello più alto è $s = \frac{c}{v}$. Indichiamo con (i,j), $1 \le i \le j \le k$, il bicchiere in posizione (i,j) al livello k a contare dall'alto (non dal basso come nel testo del problema), in altre parole i bicchieri dei quattro livelli sono

$(1,1)$

$(1,1)$
$(1,2)$ $(2,2)$

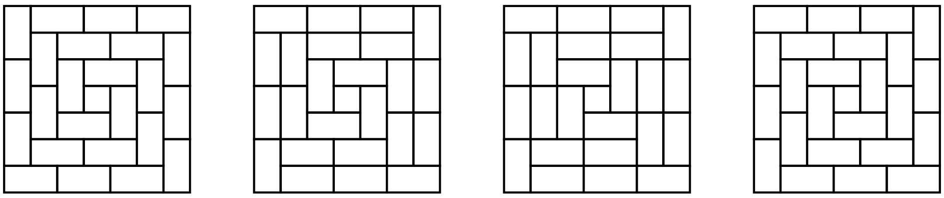
$(1,1)$
$(1,2)$ $(2,2)$
$(1,3)$ $(2,3)$ $(3,3)$

$(1,1)$
$(1,2)$ $(2,2)$
$(1,3)$ $(2,3)$ $(3,3)$
$(1,4)$ $(2,4)$ $(3,4)$ $(4,4)$

L'acqua che trabocca dal bicchiere (n,m) al livello k cade equamente nei bicchieri (n,m), $(n,m+1)$ e $(n+1,m+1)$ del livello $k+1$. In altre parole, il bicchiere al livello $k+1$ in posizione (i,j) riceve contributi dai bicchieri $(i-1,j-1)$, $(i-1,j)$ e (i,j) del livello k dopo che ciascuno di questi trabocca. Sia $t^k_{i,j}$ tempo di riempimento del bicchiere in posizione (i,j) al livello k. Dunque $t^1_{1,1} = s$ e, da quel momento, per ogni variazione di tempo s cola $\frac{c}{3}$ di acqua in ciascuno dei tre bicchieri al secondo livello. Perciò $t^2_{i,j} = s + 3s = 4s$. Da quel momento, per ogni frazione di tempo s cola $\frac{c}{3}\frac{2}{3} = \frac{2c}{9}$ di acqua nei bicchieri $(1,2)$, $(2,2)$ e $(2,3)$ del livello 3; negli altri bicchieri al livello 3 cola $\frac{c}{3}\frac{1}{3} = \frac{c}{9}$ di acqua. I primi si riempiono in $4s + \frac{9}{2}s = \frac{17s}{2}$; gli altri in $4s + 9s = 13s$. Cioè $t^3_{1,2} = t^3_{2,2} = t^3_{2,3} = \frac{17s}{2}$ e $t^3_{1,1} = t^3_{1,3} = t^3_{3,3} = 13s$.

Dal momento $\frac{17s}{2}$ cola $\frac{2c}{9}\frac{3}{3} = \frac{2c}{9}$ di acqua nel bicchiere $(2,3)$ del livello 4 che si riempie, da quel momento, in $\frac{9s}{2}$, cioè al momento $\frac{17s}{2} + \frac{9s}{2} = 13s$. In questo periodo negli altri bicchieri del livello 4 cola una frazione inferiore a $\frac{2c}{9}$. Dunque il primo bicchiere del livello 4 che si riempie è $(2,3)$ e questo avviene dopo $13s = 13 \cdot ,08\,\mathrm{h} = 13 \cdot 288\,\mathrm{sec} = 3744\,\mathrm{sec}$.
La risposta è `3744`.

Soluzione del problema 17. Disegni che richiedono soltanto una piastrella tagliata a metà sono come i seguenti

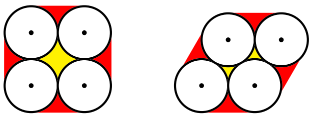


A partire dalla piastrella tagliata a metà al centro, ogni ulteriore quadrato di piastrelle che borda un quadrato con a piastrelle di lato ne aggiunge $4(a + \frac{1}{2}) = 2(2a+1)$. Il lato dell'$i$-esimo bordo richiede $i - \frac{1}{2}$ piastrelle. Indicato con k il numero di bordi intorno alla mezza piastrella al centro le piastrelle richieste sono

$$\sum_{i=1}^{k} 2\left[2\left(i - \frac{1}{2}\right) + 1\right] = 4\sum_{i=1}^{k} i = 2k(k+1).$$

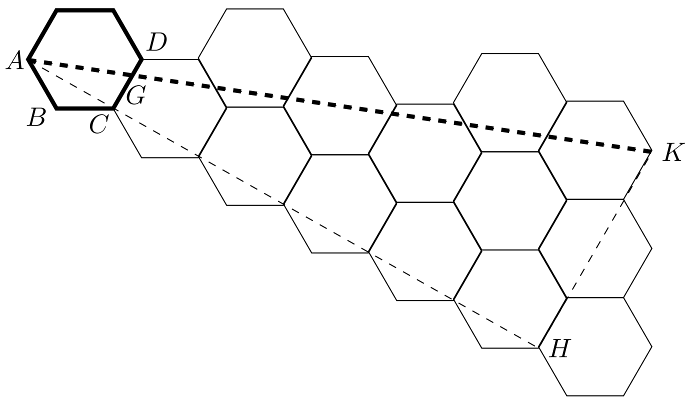
Il più grande k tale che $2k(k+1) + 1 < 2400 = 30 \cdot 80$ è $k = 34$ con $2k(k+1) + 1 = 2381$.
La stanza ha un'area di $\left(2380 + \frac{1}{2}\right) 450\,\mathrm{cm}^2 = 4761 \cdot 225 = (3^2 \cdot 23^2) \cdot (3^2 \cdot 5^2)\,\mathrm{cm}^2$ e il lato vale $3^2 \cdot 5 \cdot 23\,\mathrm{cm} = 1035\,\mathrm{cm}$.
La risposta è `1035`.

Soluzione del problema 18. Sia $r = 10\,\mathrm{cm}$. La minima distanza tra i centri di due cilindri è $2r$. Disposizioni de(lle basi de)i cilindri che permettono di ottenere tali distanze sono



Le due disposizioni hanno lo stesso perimetro. Nella seconda si ottengono distanze minime per cinque coppie di centri distinti. È la disposizione cercata perché ha area minima dato che non è possibile disporre i cilindri in modo che le sei coppie di centri distinti siano tutte a distanza minima.
In effetti, le zone rosse sono uguali nelle due disposizioni: l'area è il doppio dell'area di un quadrato escluso il cerchio iscritto. Fissato r il raggio di base, quest'ultima è $(4-\pi)r^2$. Gli interstizi tra i cilindri hanno area minore nella seconda disposizione; nella prima disposizione l'area è, come prima, $(4-\pi)r^2$. Nella seconda l'area è $\left(2\sqrt{3} - \pi\right) r^2$.
L'area di base del pacchetto è dunque $\left[4\pi + 2(4-\pi) + 2\sqrt{3} - \pi\right] r^2 = \left[8 + \pi + 2\sqrt{3}\right] r^2 \approx 1460{,}57\,\mathrm{cm}^2$. Il perimetro di base è (uguale per i due pacchetti e vale) $P = (\pi + 4)2r \approx 142{,}83\,\mathrm{cm}$; l'area laterale è $P \cdot 25\,\mathrm{cm} \approx 3570{,}79\,\mathrm{cm}^2$.
La risposta è `6491`.

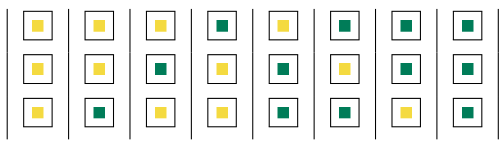
Soluzione del problema 19. Costruiamo una tassellazione del piano tramite esagoni regolari e tracciamo la traiettoria della pallina e il suo prolungamento a partire dal vertice di un esagono. Affiché la palla finisca nuovamente in buca è necessario che il prolungamento della traiettoria termini nel vertice di un altro esagono.



Usiamo le prime lettere dell'alfabeto per denotare i vertici dell'esagono, A è il vertice davanti a cui è la pallina prima del colpo; sia G il (primo) punto d'incontro della palla con il lato CD. Basta trovare il più piccolo triangolo rettangolo AHK simile ad ACG, formato da un prolungamento della diagonale AC e dal prolungamento di AG, a rappresentare la traiettoria della pallina, in modo tale che il vertice K sia il vertice di uno degli esagoni della tassellazione. Per i triangoli con angolo retto sul prolungamento di AC e con vertici che sono anche vertici di esagoni della tassellazione, il lato AH è un opportuno multiplo intero $m \cdot \frac{AC}{2}$ di $\frac{AC}{2}$ e il lato HK è un opportuno multiplo intero $n \cdot \frac{CD}{2}$ di $\frac{CD}{2}$; per m pari i valori di n accettabili sono tutti quelli congrui a $2, 0 (\mathrm{mod} 6)$, mentre per m dispari n dev'essere congruo a $3, 5 (\mathrm{mod} 6)$. Inoltre per ogni prolungamento di AC di ugual lunghezza il corrispondente prolungamento di AG a formare il triangolo incontra un ulteriore lato dell'esagono; in altre parole la palla rimbalza m volte nel percorso AK se $AH = m\frac{AC}{2}$.

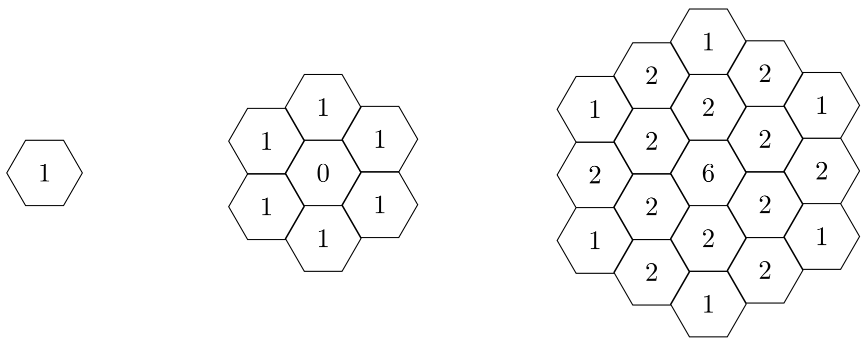
Si devono perciò trovare m e n interi tali che $m \cdot \frac{AC}{2} : AC = n \cdot \frac{CD}{2} : CG$, ovvero $m = \dfrac{3}{2}n$. I più piccoli valori di m e n che soddisfano tali condizioni e che sono appropriati per ottenere un triangolo con vertici che sono anche vertici di esagoni della tassellazione, sono $n = 8$ e $m = 12$. Contando le intersezioni della traiettoria con i bordi degli esagoni deduciamo che il numero di rimbalzi è 6.
La risposta è `0006`.

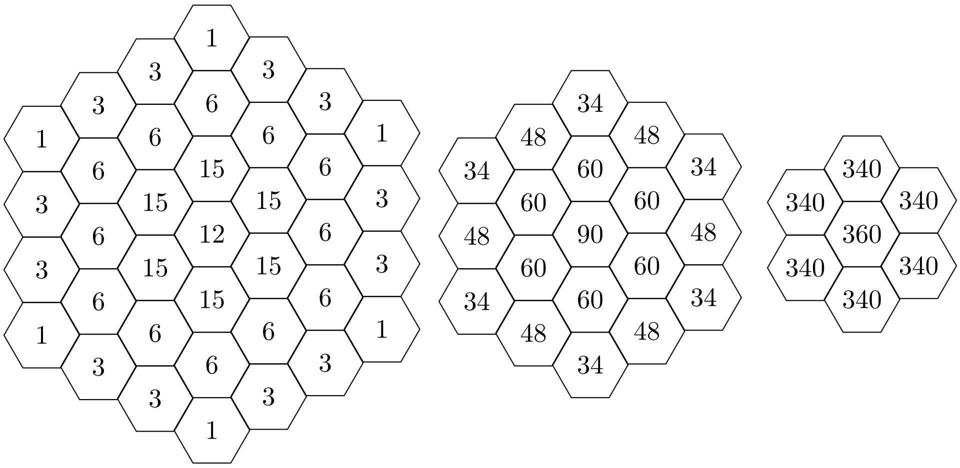
Soluzione del problema 20. Ogni giocatore non ha alcuna altra informazione oltre ai francobolli che vede sulle fronti dei suoi due compagni. Una strategia per ciascun giocatore si basa al massimo sui *due* colori che vede in un turno di gioco. Le disposizioni possibili dei francobolli sulle fronti dei tre giocatori di una squadra sono otto:



Per ogni giocatore, basare la scelta del colore sulla coppia di colori che vede produce una volta risposta corretta, una volta risposta errata, come pure rispondere «NON LO SO» non contribuisce in alcun modo. Perciò, rispetto a tutte le disposizioni, le risposte corrette di un giocatore sono tante quante le risposte errate. Del resto, dato che, in un turno, almeno un giocatore deve dare una risposta che non sia «NON LO SO», ogni giocatore scrive un colore in quattro disposizioni, scrivendo quello sbagliato in due casi. Perciò una strategia ottimale produce un punto al massimo per sei delle otto disposizioni.
Una tale strategia esiste: in sei disposizioni, esattamente uno dei tre giocatori vede due francobolli di colore diverso dal suo; gli altri due giocatori *non* sono in questa condizione. La strategia migliore richiede che il giocatore che vede due francobolli di colore uguale scriva il colore diverso da quelli che vede, altrimenti scrive «NON LO SO». Con questa strategia la probabilità che la squadra dei matematici risponda in modo corretto è $\frac{3}{4}$. Dato che la probabilità che la squadra di **FNT** risponda in modo errato è $\frac{1}{2}$, il turno termina 1 punto a 0 per la squadra dei matematici con una probabilità di $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.
La risposta è `3750`.

Soluzione del problema 21. Possiamo associare ad ogni stato di riempimento delle tre scatole una terna ordinata (x, y, z) dove x rappresenta il numero di monete nella prima scatola, y il numero di monete nella seconda e z il numero di monete nella terza. Lo stato di partenza è $(0, 0, 0)$, quello che vogliamo ottenere tramite le mosse è $(6, 6, 6)$.
Notiamo immediatamente che, dato che tutti e tre i numeri possono solo aumentare, in ogni stato raggiunto facendo delle mosse a partire dallo stato iniziale si ha $x, y, z \geq 0$. Per lo stesso motivo, perché sia possibile raggiungere lo stato $(6, 6, 6)$ è necessario che $x, y, z \leq 6$. Possiamo a questo punto interpretare la terna (x, y, z) come le coordinate di un punto nello spazio; le condizioni precedenti comportano che gli stati raggiungibili da quello di partenza e che possono raggiungere quello di arrivo devono necessariamente appartenere al cubo con i lati paralleli agli assi che ha due vertici opposti in $(0, 0, 0)$ e $(6, 6, 6)$, oltre che ad avere coordinate intere. Il numero di punti con queste caratteristiche è $7^3 = 343$. Per ognuno di essi consideriamo il numero di sequenze ordinate di mosse che portano allo stato associato alla tripla.
Dato che ad ogni mossa $x + y + z$ aumenta di 3, tutti i punti su cui c'è scritto un valore non nullo devono giacere su un piano della forma $x+y+z = 3k$, dove $k \in \mathbb{N}$ è il numero di mosse che permettono di raggiungerlo dallo stato iniziale. Intersecando il cubo con un piano della forma $x + y + z = 3k$ con $k \in \mathbb{N}$, si ottiene un esagono dato che il piano è perpendicolare alla diagonale del cubo: i punti raggiungibili in k mosse dallo stato di partenza sono i punti a coordinate intere di questo esagono.
Notiamo ora che, facendo una mossa si passa necessariamente da uno stato associato a un punto su un piano della forma $x + y + z = 3k$ allo stato associato a un punto sul piano $x + y + z = 3(k + 1)$, quindi il numero scritto su un determinato punto A appartenente al piano $x + y + z = 3k + 3$ è la somma al massimo di 6 numeri (dato che ci sono 6 mosse) scritti su punti che giacciono sul piano $x + y + z = 3k$; in particolare se proiettiamo A sul piano $x + y + z = 3k$ troviamo un punto P di tale piano (anche lui a coordinate intere): i punti i cui numeri scritti sopra contribuiscono alla somma sono i punti a coordinate intere del piano $x + y + z = 3k$ più vicini a P.
Possiamo quindi, fissato k, rappresentare i punti a coordinate intere del piano $x+y+z = 3k$ su una griglia esagonale, allora il numero in un certo punto è la somma dei vicini della casella corrispondente nella griglia precedente, tenendo fissa la casella centrale. Le griglie corrispondenti ai piani $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sono rappresentate qui sotto. A titolo di esempio, il valore della casella centrale della terza griglia, cioè per $k = 2$, è 6 poiché la sua proiezione sul piano individuato da $k = 1$ è quella centrale con valore 0 le cui caselle vicine sono 6 con numeri 1).





Quindi la risposta è il numero scritto sul punto $(6,6,6)$, cioè $340+340+340+340+340+340 = 2040$.
La risposta è `2040`.