



Progetto Olimpiadi della Matematica



Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **100 minuti dall'inizio:** termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

da un'idea di

Alessandro Manzoni

con suggerimenti da parte del Trio



17 gennaio 2020



Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi⁽¹⁾



1. QUEL RAMO DEL LAGO _____ Silvia Sconza
A.M. QUEL RAMO DEL LAGO DI COMO CHE VOLGE A MEZZOGIORNO (e, quando suona mezzogiorno, il carillon di Don Abbondio si accende e in una finestrella compare un numero a caso compreso tra 1 e 15000. Premendo un pulsante il numero nella finestrella viene modificato come segue:

- se il numero indicato non è primo, diventa il massimo tra i divisori dispari del numero indicato e minori di esso;
- se il numero indicato è 1 o è primo, il numero sparisce e il carillon suona.)

Perpetua (Poco prima di mezzogiorno) Senza sapere che numero comparirà, quante volte al massimo devo prevedere di dover premere il pulsante per fare suonare il carillon?

2. IMBROGLI _____ Andrea Giusto
Don Abbondio Oggi, oggi... abbiate pazienza, ma oggi non posso.

Renzo Oggi non può! Cos'è nato?

Don Abbondio C'è degli imbrogli: Quanti sono i polinomi $P(x)$ con coefficienti 0 o 1 e tali che $P(2) \leq 2020$?

Renzo Ma di che grado?

Don Abbondio Che domanda da Carneade! Ma grado qualunque, da uno in su!

3. NON SONO UN ROBOT _____ Sandro Campigotto
 Fra Cristoforo è davanti al castello di Don Rodrigo. Su un cartello si legge: Vietato l'ingresso ai robot e ai lombardi.

Fra Cristoforo Fatemi entrare.

Tira-dritto Frate, non sai leggere.

Fra Cristoforo Certo! Io vengo da ***; non sono lombardo.

Tira-dritto Per entrare devi dimostrare di non essere un robot: rispondi alla domanda seguente. Quanto vale la somma di tutti i possibili numeri b interi positivi per cui esiste un intero positivo a tale che $\sqrt{ab + b!} = 100$?

4. LA RIPARAZIONE _____ Sandro Campigotto

Tonio Non posso venire ora: devo riparare le due finestre. Mi ci vogliono 4 ore.

Renzo Beh, sei rapido. Da solo io ci impiegherei 5 ore.

Tonio Aiutami! (Insieme a Renzo, lavora alla riparazione delle due finestre)

Renzo (Passate due ore) Devo andare. Ma ormai è finito. Raggiungimi subito appena finisci.

A.M. QUANTI MINUTI SERVONO A TONIO PER TERMINARE IL LAVORO?

5. CONSOLAZIONE _____ Matteo Bobbio

Agnese (Consolando Lucia) Non c'è nulla di cui preoccuparsi; ci vuole solo pazienza. Fai come fanno i matematici: scrivi sulla lavagnetta alcuni numeri e calcolane la somma.

Lucia (Scrive $15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$) Me sventurata: la somma fa 120, ma il mio numero preferito è 88. Adesso cambio il maggior numero possibile di segni + in segni - in modo che l'espressione ottenuta dia come risultato proprio 88.

[Dare come risposta il prodotto in valore assoluto dei termini a cui è stato cambiato il segno.]

6. LA SCOPERTA DEI BRAVI _____ Andrea Giusto

Griso (Rivolto a Sfregiato e Tira-dritto) Ieri sera, come passatempo, ho scoperto l'operazione $*$. (Sfregiato e Tira-dritto si guardano in cagnesco) Beh, non ci crederete, ma è commutativa! (Sfregiato e Tira-dritto mettono mano ai coltelli) Inoltre so che $0 * 0 = 1$ e $n * (m + 1) = m(n * m) + (n * m)$ per ogni coppia di numeri naturali n e m . Chi di voi sa dirmi quanti sono gli zeri con cui termina il numero $2020 * 2019$? (Sfregiato e Tira-dritto lasciano cadere i coltelli e si mettono a fare i conti.)

⁽¹⁾ In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore.

7. NEL CASTELLO

Giulia Gaggero

Nel castello di Don Rodrigo, conte di Fuentes, Mendoza, Deferia, duca di Terranova, contestabile di Castiglia, ci sono servi, che dicono sempre la verità, e bravi, che dicono sempre il falso. Nel cortile ci sono venti impiegati al servizio di Don Rodrigo.

Primo impiegato Tutti i presenti mentono.

Secondo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me.

Terzo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e un altro.

Quarto impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri due.

Quinto impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri tre.

Sesto impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri quattro.

Settimo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri cinque.

Ottavo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri sei.

Nono impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri sette.

Decimo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri otto.

Undicesimo impiegato Esattamente uno dei presenti dice la verità.

Dodicesimo impiegato Esattamente due dei presenti dicono la verità.

Tredicesimo impiegato Esattamente tre dei presenti dicono la verità.

Quattordicesimo impiegato Esattamente quattro dei presenti dicono la verità.

Quindicesimo impiegato Esattamente cinque dei presenti dicono la verità.

Sedicesimo impiegato Esattamente sei dei presenti dicono la verità.

Diciassettesimo impiegato Esattamente sette dei presenti dicono la verità.

Diciottesimo impiegato Esattamente otto dei presenti dicono la verità.

Diciannovesimo impiegato Esattamente nove dei presenti dicono la verità.

Ventesimo impiegato Esattamente dieci dei presenti dicono la verità.

A.M. QUAL È IL NUMERO MASSIMO DI BRAVI COMPATIBILE CON TUTTE LE AFFERMAZIONI?

E QUAL È IL NUMERO MINIMO?

[Dare come risposta la somma dei due numeri.]

8. IL SOFFITTO

Luca Renzi

Tonio La cappella ha venti pareti: è un icosagono. La decorazione che ho fatto per il soffitto consiste di travi sottili a tracciare le 170 diagonali.

Renzo Quanti sono i triangoli che hanno come lati tre travi intere?

9. IN CAMMINO

Sandro Campigotto

Fra Cristoforo (*Cammina pensoso*) Quanto vale la somma $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{100 \text{ cifre}}$?

[Dare come risposta le somme delle cifre del risultato.]

10. NEL 1830

Luca Renzi

A.M. LA SOMMA DELLE CIFRE IN 1830 È 12; LA SOMMA DELLE CIFRE IN 12 È 3, CHE È ESATTAMENTE IL NUMERO DELLE CIFRE DIVERSE DA 0 IN 1830.

Renzo Quanti sono i numeri di quattro cifre che condividono questa proprietà?

Lucia Lorenzo o, come dicevan tutti, Renzo, vuoi dire: quanti sono quei numeri interi compresi tra 999 e 9999 tali che la cifra che si ottiene sommando le loro cifre ed, eventualmente, ripetendo tale operazione se non si ottiene subito una cifra, sia esattamente il numero di cifre diverse da 0 che compaiono nel numero dato? (*Renzo annuisce.*)

11. A PESCARENICO

Silvia Sconza

Lucia A Pescarenico ci sono 3420 persone: alcune sono bugiarde, e dicono sempre il falso; le altre dicono sempre la verità. Lorenzo o, come dicevan tutti, Renzo, è troppo pericoloso; dobbiamo scappare.

Renzo Fermiamo questi quattro abitanti di Pescarenico. (*Rivolto a quattro abitanti di Pescarenico.*) Quanti sono gli abitanti bugiardi di Pescarenico?

Primo abitante Ci sono un numero pari di bugiardi.

Secondo abitante Ci sono un numero divisibile per 3 di bugiardi.

Terzo abitante Ci sono un numero divisibile per 5 di bugiardi.

Quarto abitante Ci sono tanti sinceri quanti bugiardi.

Fra Cristoforo Vi assicuro che tra questi quattro c'è almeno un bugiardo.

Lucia In questo caso, quanti sono al massimo i bugiardi a Pescarenico?

12. A M M M M M M M O N Z A _____ Giuseppe Rosolini

Gertrude Lucia, questa è la tua stanza (*Apri la porta, ma si trova davanti alcune monache che stanno riparando le travi a forma di parallelepipedo che attraversano il soffitto della stanza rettangolare esattamente lungo le diagonali del soffitto; ogni trave congiunge un angolo della stanza con il centro del soffitto. C'è una linea rossa decorativa che corre in mezzo alla base di ciascuna trave e coppie di linee rosse disegnano ciascuna delle diagonali del soffitto.*)

Lucia Forse sarà una cosa lunga. . .

Prima monaca No, abbiamo già preso le misure della stanza: sono $3\text{ m} \times 4\text{ m}$. Sapendo la misura della distanza di un vertice del rettangolo del soffitto al centro del soffitto, abbiamo già tagliato quattro travi uguali a forma di parallelepipedo con tale lunghezza.

Seconda monaca La sezione di ciascuna trave è quadrata e ha lato di 10 cm. Ma abbiamo dovuto tagliare le punte di ciascuna trave in modo tale che queste si possano incastrare senza lasciare interstizi contro le pareti della stanza o al centro del soffitto, né scalini tra una trave e l'altra.

Terza monaca Insomma ogni trave ha esattamente due lati che non toccano un'altra trave o il soffitto.

Gertrude (*Rivolta a Lucia*) Qual è il rapporto tra il volume delle travi a parallelepipedo originariamente tagliate e il volume delle parti rimosse dalle travi per incastrarle senza lasciare interstizi né scalini?

13. DURANTE LA RICREAZIONE _____ Sandro Campigotto

Prima monaca Considerate i numeri n con le seguenti proprietà: dividendo 545 con n si ha resto r ; dividendo 682 per n si ottiene resto $2r$; dividendo 1227 per n viene resto $3r$.

Gertrude Qual è il massimo numero n con le proprietà elencate?

14. NEL MONASTERO _____ Anna Ulivi

In un luogo appartato vicino al muro di cinta.

Egidio (*Scrivendo su un foglio*) Consideriamo un trapezio isoscele $ABCD$ con base minore CD di 6 cm e tracciamo la bisettrice di \widehat{D} che incontra la base AB in E . Sia F il punto di incontro di DB e CE . Si sa che $CF = FE$ e CE è lungo 14 cm. (*Lo passa a Gertrude*)

Gertrude (*Sciaguratamente*) Qual è l'area del trapezio?

15. LA CUCINA COMPLETA _____ Sandro Campigotto

Pennellone Al primo che telefona con la risposta corretta di quanti sono i numeri di tre cifre in cui la cifra delle decine è più grande di almeno una delle altre cifre, regaleremo la cucina completa!

A.M. QUAL È LA RISPOSTA CORRETTA?

16. NELLA LOCANDA _____ Sandro Campigotto

Renzo Che gioco fate con quel dado ben bilanciato a 6 facce?

Locandiere Dopo un lancio, cancello il numero sulla faccia superiore del dado e lo sostituisco con il suo doppio.

Renzo Ma qual è la probabilità che al quarto lancio esca un numero dispari?

Locandiere Non è zero.

[*Dare come risposta la somma tra il numeratore ed il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

17. NELLA BIBLIOTECA _____ Sandro Campigotto

Don Ferrante Lucia, prova a rispondere. (*Inizia a leggere*) Dato un triangolo equilatero ABC , siano P , Q e R punti interni al triangolo tali che $PB = PC$, $PA = 15\text{ cm}$, $QB = QA$, $QC = PA$, $RA = RC$ e $RB = QC$. Il rapporto tra l'area del triangolo ABC e quella del triangolo PQR è 16. Quanti millimetri è lungo il lato AB ?

Lucia Ma il problema non ha soluzione unica!

Don Ferrante (*Riprendendosi dalla sorpresa e con un tono di rimprovero*) Allora dimmi la somma di tutte le soluzioni.

18. IL SACCHETTO

Anna Ulivi

Don Ferrante Ecco un sacchetto che contiene palline di 3 colori diversi: verdi, rosse e blu.

Donna Prassede Quante palline ci sono per ciascun colore?

Don Ferrante Apri il sacchetto!

Donna Prassede Non voglio aprirlo solo per una curiosità così meschina.

Don Ferrante (*Con un sogghigno*) Ti assicuro che nel sacchetto ci sono al massimo 13 palline; la quantità di palline verdi è maggiore di quella di rosse che è maggiore di quella di blu. (*Prende un foglio; ci scrive sopra un numero e lo mostra a Donna Prassede*) Questo è il prodotto delle tre quantità.

Donna Prassede Non ho abbastanza dati: ci sono almeno due palline blu?

A.M. MA DONNA PRASSEDE SA CHE SOLO UNA DELLE RISPOSTE LE PERMETTERÀ DI CHETARE LA SUA CURIOSITÀ. NEL CASO IN CUI LA RISPOSTA DI DON FERRANTE NON PERMETTESSE A DONNA PRASSEDE DI DETERMINARE COME SONO RIPARTITI I COLORI, QUALI SAREBBERO LE DUE POSSIBILI PARTIZIONI RIMASTE?

[*Dare come risposta la somma dei due numeri $100a + 10b + c$ con a il numero di palline verdi, b il numero di palline rosse e c il numero di palline blu.*]

19. A CENA

Silvia Sconza

Don Ferrante Peccato che il quoziente di 1624 nella divisione con 4 non sia un numero primo, perché sarebbe stata una sequenza interessante: 1621 è primo, 1622 è $2 \cdot 811$ e 811 è primo, 1623 è $3 \cdot 541$ e 541 è primo.

Lucia Mi perdoni, illustrissimo! Ma non sarebbe stato possibile perché non esistono quadruple di numeri come quella che desiderava. Invece ci sono molte sequenze di tre numeri consecutivi n , $n + 1$ e $n + 2$ tali che n è primo, $\frac{n+1}{2}$ è primo e $\frac{n+2}{3}$ è primo. A Lecco tali numeri n la gente li chiama numeri *della provvidenza*.

A.M. COME HA RAGIONE! GIÀ I NUMERI DELLA PROVVIDENZA INFERIORI A 1000 SONO MOLTI: QUAL È LA LORO SOMMA?

20. NEL LAZZARETTO

Andrea Giusto

Don Rodrigo (*Rivolto ad altri due nobili appestati*) Ormai siamo morenti. Perché non ci distraiamo con un gioco con le pistole?

Conte Attilio Spiega.

Don Rodrigo Inizio io e sparo a te. Se non sei colpito, lanci un doblone: se esce testa spari a quella porta; se esce croce spari a Don Juan. Se Don Juan non è colpito (che tu abbia sparato alla porta o a lui), Don Juan spara a me. Se io non sono colpito, ricomincio e sparo a te. E così via. Il gioco termina quando uno dei tre giocatori viene colpito.

A.M. RITENENDO CHE, VISTE LE CONDIZIONI DI DON RODRIGO, DEL CONTE ATTILIO E DI DON JUAN, CIASCUNO COLPISCE IL BERSAGLIO PREFISSATO CON PROBABILITÀ $\frac{1}{2}$, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE AL TERMINE DEL GIOCO IL CONTE ATTILIO ABBA COLPITO LA PORTA ESATTAMENTE UNA VOLTA?

[*Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

21. LA PERFEZIONE

Sandro Campigotto e Giuseppe Rosolini

Agnese Con $n!$ indico il prodotto di tutti i fattoriali da 1 fino a n , cioè $n! \stackrel{\text{def}}{=} 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot n!$.

Dico che m è la *perfezione* di n se $\frac{m!}{n!}$ è il quadrato di un numero intero. Sai quali sono le coppie di numeri (m, n) tali che m sia la perfezione di n ?

Perpetua No di certo, ma è chiaro dalle prime coppie di perfezioni che, per ogni n , c'è al massimo una perfezione di n .

Agnese Ti sbagli! Si trovano già tre numeri n_1 , n_2 e n_3 minori di 10 per cui esistono due perfezioni diverse m'_i e m''_i , $i = 1, 2, 3$.

A.M. QUALI SONO LE PERFEZIONI m'_1 , m''_1 , m'_2 , m''_2 , m'_3 e m''_3 ?

[*Dare come risposta $m'_1 \cdot m''_1 + m'_2 \cdot m''_2 + m'_3 \cdot m''_3$.*]