Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

TANTO TEMPO FA, IN UNA GALASSIA LONTANA LONTANA...

20 gennaio 2017

Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi(1)

1. *PAROLA D'ORDINE* ______ Simone Traverso

Pianeta Corellia

Tivik Per entrare nella base chiedono qual è il più grande numero primo di due cifre tale che la somma delle sue cifre è ancora un numero primo, e il loro prodotto è il quadrato di un numero primo.

Cassian Andor Basta calcolare il numero?

Tivik Sì.

Cassian Andor Ma è facile.

Tivik Forse, l'Impero Galattico sa che nessuno nella galassia ha studiato teoria dei numeri a scuola. Nessuno sa calcolarlo.

Voce fuori campo QUAL È IL NUMERO CHE PERMETTE A CASSIAN DI ENTRARE NELLA BASE?

2. *GARA A SQUADRE* ______ Damiano Poletti

Pianeta Coruscant

Yoda All'ultima gara a squadre planetaria è successa una cosa piuttosto particolare: la squadra 1 ha consegnato 2 foglietti, la squadra 2 ha consegnato 4 foglietti, la squadra 3 ha consegnato 6 foglietti e così via. Al termine della manifestazione gli organizzatori volevano recuperare almeno un foglietto per squadra ma senza doverli leggere tutti. Grazie alla Forza, avevo capito che, se prendevano 2861 foglietti a caso, ce ne sarebbe stato sicuramente uno per ciascuna squadra. Ma se ne prendevano 2860, questo non sarebbe stato vero.

Bail Organa Maestro, forse mi sbaglio, ma bastava guardare quante squadre partecipavano.

Yoda Sapevo anche quello grazie alla Forza.

Voce fuori campo QUANTE SQUADRE HANNO PARTECIPATO ALLA GARA A SQUADRE DI CORUSCANT?

3. *INTERROGAZIONI* ______ Simone Muselli

Pianeta Lah'mu – Scuola

Maestra (*Rivolta agli alunni*) Oggi interroghiamo i primi 3 alunni dell'appello. Non diremo i loro nomi per rispetto della privacy, ma soltanto i loro numeri nell'appello: 1, 2 e 3.

In 3 ore diverse, in 3 materie diverse – Matematica, Basic Galattico e Droidspeak, i tre alunni vengono interrogati come ha detto la maestra

Jin Erso Per la privacy, si sa soltanto che

- l'alunno 2 è stato interrogato prima dell'ora di Basic Galattico,
- l'alunno 3 è stato interrogato prima dell'ora di Matematica,
- l'alunno 1 non è stato interrogato in Basic.

Di quale materia e quando ogni studente è stato interrogato?

[*Dare la risposta indicando da sinistra verso destra il numero dell'alunno interrogato in Matematica, il numero dell'alunno interrogato in Basic, il numero dell'alunno interrogato per primo, il numero dell'alunno interrogato per secondo.*]

(1) In ogni problema, a fianco di ogni titolo, compare il nome dell'autore.

4. *MISSIONE SEGRETA* ———————————— Mattia Fecit

Pianeta Corellia

Cassian Andor Il tubo di svuotamento, per tutta la sua lunghezza, ha la sezione trasversale di dimensioni $109\,\mathrm{cm} \times 156\,\mathrm{cm}$, esattamente come la botola per accedervi.

Bistan Come facciamo a far uscire quel lunghissimo foglio metallico rigido? Il suo spessore è trascurabile, ma è largo $60\,\mathrm{cm}$ e lungo $100\,\mathrm{m}$. Dovremo tagliarlo e lasciar cadere i pezzi, ma dovremo farli in modo da essere certi che ciascuno passi senza incastrarsi contro i bordi del tunnel durante la caduta. I pezzi devono essere tagliati in modo che, anche se dovessero ruotare mentre cadono, non si possano incastrare.

Cassian Andor Tagliamo il foglio metallico in rettangoli.

Bistan Abbiamo poco tempo. Dobbiamo farlo con il minor numero possibile di tagli.

Cassian Andor Facciamo i tagli perpendicolari alla lunghezza. Così produciamo rettangoli di larghezza $60\,\mathrm{cm}$.

Bistan Quanti rettangoli tagliamo?

Cassian Andor ...

5. *GARA IMPOLVERATA* ———————————— Damiano Poletti

Pianeta Tattoine – Gara di Sgusci di Mos Espa

Jabba the Hutt Corrono 8 sgusci, numerati da 1 a 8. Scommettete!

Ziro the Hutt Con tutta questa polvere non si vede niente. Chi ha vinto?

Jabba the Hutt Lo sguscio numero 3 è arrivato prima dello sguscio numero 4 che a sua volta è arrivato prima dello sguscio numero 5. Quante potrebbero essere le possibili classifiche finali?

6. *GARBUGLIO* ———————————— Francesco Raspaolo

Pianeta Lah'mu – Scuola

Maestra (*Rivolta agli alunni*) Ascoltate: un numero si dice *ingarbugliato* se il massimo comun divisore tra esso e il numero scritto alla rovescia è 1.

Jin Erso 20 scritto alla rovescia è 2?

Maestra Sì. Quando rovesciate un numero, cancellate le cifre 0 scritte a sinistra.

Jin Erso Quanti sono i numeri ingarbugliati diversi da zero e con al massimo due cifre?

7. *AL SUPERMERCATO* ———————————— Damiano Poletti

Pianeta Corellia – Supermercato

Cassian Andor In questo supermercato tutti i prezzi usano solo cifre 9.

Bistan È per ingannare il consumatore normale: vede due cifre e non pensa che sta pagando praticamente 100 crediti imperiali.

Cassian Andor (*Uscendo dal supermercato*) Abbiamo pagato 201708 crediti imperiali. Lo scontrino era lungo, ma quante cifre 9 ci sono scritte sopra come minimo?

8. *OTTAVI DI FINALE* ———————————— Francesco Raspaolo

Pianeta Serenno

Sheev Palpatine Interessante questo torneo ad eliminazione diretta tra cavalieri Jedi.

Bail Organa È incredibile quanti sono: gli iscritti sono 4096.

Sheev Palpatine Partecipano anche Anakin e Obi Wan.

Bail Organa Ho saputo che sono stati estratti in posizioni consecutive nel tabellone.

Sheev Palpatine Vorrei che non si affrontassero prima degli ottavi di finale.

Bail Organa Ammesso che vincano tutti gli incontri prima di affrontarsi, la probabilità che non si affrontino prima degli ottavi di finale non la conforta.

Sheev Palpatine Ah, sì! Qual è la probabilità a cui si riferisce?

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

9. *RITORNO AL FUTURO IV* ———————————— Alessandro Murchio

Voce fuori campo QUAL È IL VALORE DI a INTERO POSITIVO (*si interrompe, respira profondamente*) DIVISIBILE PER 10 TALE CHE L'EQUAZIONE $x^5 - ax + 3 = 0$ ABBIA UNA SOLUZIONE INTERA?

10. *NEGATIVI E POSITIVI* ——— Simone Muselli

Pianeta Ahch-To – Un'isola sperduta nell'oceano

Viceré Nute Gunray I miei sudditi sono 2016, divisi in due fazioni: i Negativi, che mentono sempre, e i Positivi, che dicono sempre la verità.

Darth Sidious (*In collegamento interplanetario*) Il Lato Oscuro della Forza mi conferma che tu sei Positivo; posso star certo delle tue risposte: li hai invitati tutti al banchetto?

Viceré Nute Gunray Certo! Sono tutti presenti. Durante la serata, molti si sono stretti la mano per salutarsi e, prima di andare via, ognuno dei miei invitati ha detto la stessa frase: «Ho stretto la mano a più Negativi che Positivi».

Darth Sidious Grazie al Lato Oscuro della Forza, so che tutti i Positivi si sono stretti la mano fra loro e che tutti i Negativi si sono stretti la mano fra loro. So perciò quante mani hai stretto tu, viceré.

Il Viceré trema

Voce fuori campo QUANTE MANI HA STRETTO IL VICERÉ?

11. *IL MECCANISMO* ——— Fabio Ardenghi

Pianeta Geonosis

Obi Wan Kenobi Nella fabbrica dei droidi ho visto un particolare meccanismo composto da 5 ruote dentate, ingranate una all'altra e disposte con i centri allineati. Sulle ruote è stata tracciato una linea retta che passa per i cinque centri, il semicerchio superiore di ogni ruota è stato colorato di rosso, di verde il semicerchio inferiore. Le cinque ruote hanno rispettivamente raggi 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm e 6 cm. La ruota di raggio 2 cm impiega esattamente 2 giorni per compiere un giro e si blocca ogni 2 giorni di utilizzo, la ruota di raggio 3 cm si blocca ogni 3 giorni di utilizzo e così via. Ci vuole un giorno per sbloccare una ruota durante il quale il meccanismo non può funzionare; più ruote rotte possono essere sbloccate contemporaneamente.

Anakin Skywalker Hanno fatto partire ora il meccanismo: colpiremo quando le ruote saranno tutte insieme nella stessa configurazione in cui erano alla partenza. Usiamo la Forza per capire tra quanti giorni potremo colpire.

Obi Wan Kenobi Non serve la Forza.

Voce fuori campo TRA QUANTI GIORNI ANAKIN E OBI WAN ATTACCHERANNO LA FABBRICA?

12. *IL TRABOCCHETTO* ——— Mattia Fecit

Pianeta Lah'mu – Scuola

Maestra (*Rivolta agli alunni*) Ascoltate: considerate un triangolo ABC. Per ogni vertice, tracciate un segmento verso il lato opposto ottenendo i segmenti AD con D su BC, poi BE e CF rispettivamente con E su AC e F su AB. Sia G il punto di intersezione tra AD e BE, sia H il punto di intersezione tra BE e CF e sia I il punto di intersezione tra CF ed AD. Sapendo che GH e HB misurano 160 m, HI e IC misurano 180 m, IG e AG misurano invece 200 m, quanto vale 1000 volte il rapporto tra l'area del triangolo GHI e quella del triangolo ABC?

Jin Erso Maestra, è una domanda trabocchetto!

Maestra Hai ragione: il segmento GB misura 320 m.

13. *RITORNO AL FUTURO V* ——— Alessandro Murchio

Voce fuori campo SIA $p(x) = x^2 - 1$. QUANTO VALE LA SOMMA (*si interrompe, respira profondamente*) DELLE DUE RADICI DEL POLINOMIO

$$p(x) + p(x-1) + p(x-2) + \ldots + p(x-2017)?$$

14. *TRADIZIONI DI GARA* ______ Damiano Poletti

Pianeta Coruscant

Bail Organa È tradizione che la gara a squadre si concluda con una grande festa a cui partecipano sia le squadre maschili sia le squadre femminili.

Yoda (*Chiude gli occhi, inspira profondamente*) Grazie alla Forza so che le ragazze sono più dei ragazzi, ma sono meno del doppio del numero dei ragazzi.

Bail Organa A inizio serata ogni capitana femmina ha regalato un foglietto di risposta dorato a ciascun capitano maschio che conosce. A fine serata, invece, ogni capitano maschio ha regalato un foglietto di risposta con un gioiello incastonato a ciascuna capitana femmina che non conosce.

Yoda Grazie alla Forza so che in totale sono stati scambiati 3551 foglietti.

Bail Organa Quante sono le squadre presenti alla festa?

15. *PLATONE DECOSTRUITO* ______ Mattia Fecit

Pianeta Lah'mu – Scuola

Maestra (*Rivolta agli alunni*) Ascoltate: in ciascuno dei cinque solidi platonici, si traccino i segmenti più lunghi possibile. Quanti segmenti si sono tracciati?

Jin Erso Maestra, la domanda è troppo difficile perché in questa galassia non sappiamo che cosa siano i solidi platonici.

Maestra I solidi platonici sono solidi con facce tutte uguali. Il cubo ha sei facce quadrate, il dodecaedro ha dodici facce a pentagono regolare, e tre hanno facce a triangolo equilatero: il tetraedro ha quattro facce, l'ottaedro ha otto facce e l'icosaedro ha venti facce.

16. *IL NUOVO SIMBOLO* ______ Francesco Raspaolo

Luna Yavin 4

Mon Mothma Il senatore Vasp Vaspar propone un nuovo simbolo per la Ribellione: la parola al senatore Vasp Vaspar.

Vasp Vaspar Prendete un foglio quadrato e ritagliate una stella a 8 punte in questo modo: segnate i punti medi dei lati del quadrato e considerate i quattro rettangoli con due vertici nei vertici del quadrato e due vertici nei punti medi. Per ciascuno di questi rettangoli, tracciate con la matita la coppia delle diagonali. Si ottiene la stella che propongo ritagliando la parte del quadrato che sta all'esterno delle tracce di matita.

Tynnra Pamlo Ma le punte sono diverse?

Vasp Vaspar Sì e no, per rappresentare la diversità di provenienza dei componenti della Ribellione.

Nower Jebel Che cosa dice Lucas?

Vasp Vaspar Non fa parte della Ribellione: non gliel'ho chiesto.

Bail Organa Quanto è mille volte il rapporto tra l'area della stella e l'area del quadrato di partenza?

17. *L'ISCRIZIONE* ______ Simone Muselli

Jedha City – Pianeta Jedha

Chirrut Îmwe Descrivimi l'iscrizione sulla porta del Tempio.

Baze Malbus Ci sono lettere, segni e cifre scritti su tre righe, le prime due sono separate dalla terza da una linea orizzontale. Te la leggo:

$$\begin{array}{ccccc} D & B & D & C & - \\ A & D & B & A & = \\ \hline 4 & 3 & 6 & 9 & \end{array}$$

Chirrut Îmwe Grazie alla Forza, so che A, B, C e D sono cifre diverse da quelle scritte.

Baze Malbus La Forza non esiste.

Chirrut Îmwe Però io so le cifre che corrispondono alle lettere A, B, C, D.

[*Dare la risposta scrivendo le cifre A, B, C, D, nell'ordine, da sinistra a destra.*]

18. *VERNICI* ______ Simone Muselli

Sheev Palpatine Sono appena stato eletto senatore. Riverniciamo l'appartamento.

C-3PO Va bene, signore.

Sheev Palpatine Va a comprare r litri di vernice rossa, g di vernice gialla e b di vernice blu, con r, g e b che rispettino le seguenti condizioni:

- r, g e b sono interi positivi;
- il quadrato dei litri di vernice gialla deve essere minore o uguale dei litri di vernice rossa;
- il cubo dei litri di vernice rossa deve essere minore o uguale del quadrato dei litri di vernice blu;
- i litri di vernice blu non devono essere più del quintuplo dei litri di vernice gialla.

C-3PO (*A Palpatine*) Sì, signore. (*Tra sé e sé*) La Forza gli ha dato alla testa: le richieste che fa non determinano la terna univocamente. Che sfortuna essere l'unico nella galassia così dotato da saper rispondere alla domanda: quante sono le terne ordinate (r, g, b) che soddisfano le richieste del neo-senatore?

19. *I TRASMETTITORI* ______ Mattia Fecit

Pianeta Corellia – vicino alla Base dell'Impero Galattico

Cassian Andor La base è costituita da quattro trasmettitori quadrati identici e dalla zona interna ai quattro trasmettitori, pure quadrata. Ciascun trasmettitore ha in comune un vertice con altri due trasmettitori. Dobbiamo arrivare alla zona interna dove ci sono le apparecchiature da distruggere.

Bistan Tivik ci ha detto che la superficie totale della base è compresa tra $5500m^2$ e $6000m^2$ e che la lunghezza di un lato di un trasmettitore è un numero intero.

Cassian Andor Quanto è lungo in m il lato di un trasmettitore?

20. *RITORNO AL FUTURO VI* ______ Alessandro Murchio

Voce fuori campo Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$ (*si interrompe, respira profondamente*) per ogni x diverso da 0. Quanto vale $100 \cdot f(100)$?

21. *PARI E DISPARI* ______ Francesco Raspaolo

Pianeta Lah'mu – Fattoria Erso

Galen Erso Che cosa stai facendo?

Jin Erso Faccio un gioco da sola: penso a un numero naturale n, scrivo su un foglio il prodotto dei 6 numeri naturali che lo seguono, cancello tutti gli zeri finali e guardo se il numero ottenuto è pari o dispari. Per ora ho sempre trovato numeri pari.

Galen Erso Bene. Ti faccio una domanda: quale sarà il più piccolo numero naturale n per cui la tua procedura produrrà un numero dispari?

22. *GOCCIA A GOCCIA* ______ Mattia Fecit

Jedha City – Pianeta Jedha

Chirrut Îmwe Descrivimi della clessidra del Tempio.

Baze Malbus La clessidra è formata da due coni uguali attaccati per il vertice. Il cono inferiore è pieno di acqua. Quando la clessidra viene rovesciata, scambiando così le posizioni dei due coni, l'acqua comincia a cadere goccia dopo goccia, lentamente, regolarmente, dal cono superiore a quello inferiore.

Chirrut Îmwe So che sono passati 1764 anni da quando la clessidra è stata rovesciata.

Baze Malbus L'acqua è esattamente a metà altezza del cono superiore.

Chirrut Îmwe Io sono la Forza e la Forza è con me. So quanti anni da questo momento impiegherà l'acqua per completare il riempimento del cono inferiore.

Baze Malbus Non serve la Forza, ma la Matematica!

Voce fuori campo Quanti sono gli anni che Chirrut sa?

23. *CHENINI* ——— Francesco Raspaolo

Pianeta Tattoine – Da Chalmun

Evazan Qui su Tattoine giocano a Chenini.

Ponda Baba Come si gioca?

Evazan È un gioco d'azzardo: si gioca con due dadi a sei facce non truccati. (*Ponda ride*) Un dado è rosso, l'altro è giallo. Si usa una scacchiera quadrata 10×10 sulla quale tutti i quadrati hanno due lati paralleli colorati in giallo e gli altri due lati (paralleli) colorati in rosso.

Ponda Baba Dato che ogni quadrato ha in comune almeno due lati perpendicolari con altri quadrati, la scacchiera risulta un reticolo formato da undici linee gialle parallele e undici linee rosse perpendicolari a quelle gialle.

Evazan Bravo: eccola qui! Si mette un pedone in uno dei quattro vertici della scacchiera e lo si muove sui lati dei quadrati sulla scacchiera a seconda del risultato del lancio dei due dadi colorati, sempre nello stesso verso: si sposta di tanti lati rossi quanto il numero uscito sul dado rosso e di tanti lati gialli quanto il numero uscito sul dado giallo.

Ponda Baba Scommetto 10000 crediti che il pedone arriverà nel vertice diagonalmente opposto a quello di partenza esattamente con tre lanci dei due dadi.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ DI VITTORIA DI PONDA?
[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

24. *L'ARCIPELAGO* ——— Simone Muselli

Pianeta Scarif

Yoda Che bell'arcipelago!

Mace Windu Sono 100 isole. Per equità, gli abitanti le hanno chiamate con i numeri da 1 a 100. Ogni isola è una nazione indipendente. Ma tutte le isole dell'arcipelago sono riunite in un'unione che batte la stessa moneta.

Yoda In più, per ciascun n da 1 a 100, l'isola n ha esattamente n abitanti.

Mace Windu I midichlorian hanno prodotto uno strano effetto sugli abitanti dell'arcipelago. Questi si dividono tra quelli di indole C, che dicono sempre il vero, e quelli di indole O, che dicono sempre il falso.

Yoda Le isole sono collegate da ponti (galleggianti, sospesi o sommersi): l'isola n è collegata con un ponte a ogni altra isola m tale che n sia multiplo di m oppure m sia multiplo di n. Nella lingua scarifiana due isole collegate da un ponte sono dette "linkate".

Mace Windu Per dimostrare la forte unione delle isole, l'inno dell'arcipelago ha una sola, lunga strofa che ogni cittadino può cantare perché è una frase che pronuncia senza contraddire la propria indole (non importa se C o O): «Nella totalità delle isole linkate alla mia isola, al massimo tanti abitanti quanti il numero che è la mia isola sono di indole C».

Voce fuori campo QUANTI SONO GLI ABITANTI DELL'ARCIPELAGO DI INDOLE C?

Gara di matematica a squadre femminile 2017
Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Fabrizio Ardenghi, Matteo Bobbio, Mattia Fecit, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Damiano Poletti, Francesco Raspaolo, Simone Traverso.
Sono tutti ex-giocatori, che sono ora iscritti a corsi di studi presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. Per risolvere il problema è sufficiente controllare quali sono i primi di due cifre che rispettano le proprietà richieste. Per ridurre al minimo i numeri da controllare si possono fare alcune considerazioni: se la somma delle due cifre deve essere un numero primo, allora la prima cifra deve essere pari e la seconda dispari (11 è da scartare perché $1 \cdot 1$ non è il quadrato di un numero primo). Dato che la prima deve essere pari, la seconda proprietà comporta che la seconda cifra è 1 perché 22 non è primo. L'unico numero di due cifre che rispetta quanto richiesto è 41.
La risposta è `0041`.

Soluzione del problema 2. Pescando tutti i foglietti eccetto due non si avrebbe la certezza di pescarne uno per squadra, in quanto potrebbero essere esclusi esattamente i 2 foglietti della squadra 1. Se invece si pescassero tutti i foglietti consegnati eccetto uno si avrebbe la certezza di averne almeno uno per squadra. Questo vuol dire che in totale sono stati consegnati 2862 foglietti. Ma allora se n è il numero delle squadre:

$$2862 = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Da cui si ottiene che il numero delle squadre è 53.
La risposta è `0053`.

Soluzione del problema 3. Per la prima e la seconda frase né il 2, né il 3 possono essere stati interrogati per ultimi. Quindi il numero 1 è l'ultimo. Sempre per la prima e la seconda frase né Matematica, né Basic possono essere state alla prima ora. Quindi la prima ora era quella di Droidspeak. Ancora per la prima e la seconda frase né l'alunno 1 né l'alunno 2 sono stati interrogati in Basic. Perciò l'alunno 3 è stato interrogato di Basic e l'alunno 2 è stato interrogato di Droidspeak. Ne segue anche che l'ora di Matematica è stata dopo quella di Basic e l'alunno 1 è stato interrogato in Matematica.
La risposta è `1323`.

Soluzione del problema 4. Per far passare il rettangolo, è necessario che la diagonale sia al massimo 109 cm. Quindi, l'altra dimensione di un rettangolo tagliato deve essere $\sqrt{109^2 - 60^2}\,\mathrm{cm} = 91\,\mathrm{cm}$. Dato che $100\,\mathrm{m} = 109 \cdot 91\,\mathrm{cm} + 81\,\mathrm{cm}$, si fanno 110 rettangoli.
La risposta è `0110`.

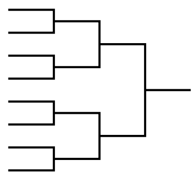
Soluzione del problema 5. Le possibili classifiche sono tutti i modi in cui possiamo scambiare tra di loro i numeri da 1 a 8 facendo in modo che 3 compaia prima di 4 e 4 prima

di 5, cioè riordinando eventualmente i numeri 3, 4 e 5 dopo la permutazione. Le classifiche possibili sono $\frac{8!}{3!} = 6720$.
La risposta è `6720`.

Soluzione del problema 6. Si osserva subito che i multipli di 3 e i numeri palindromi non sono numeri ingrabugliati così come i numeri con due cifre pari e i numeri con una sola cifra insieme con i multipli di 10 esclusi 1 e 10. Del resto, i numeri primi di maggiori di 11 insieme con i corrispondenti numeri invertiti sono ingarbugliati. I numeri rimasti sono quelli che terminano per 5, non divisibili per 3 o palindromi, e con la cifra delle decine pari $(25, 65, 85)$ e i corrispondenti invertiti, e 49 con 94. Si osserva che anche loro sono numeri ingarbigliati. In tutto i numeri ingarbugliati sono $32 + 8 + 2 = 42$.
La risposta è `0042`.

Soluzione del problema 7. Osserviamo che $201708 = 9 \times 22412$. Quindi possiamo limitarci a raggiungere 22412 € solo con cifre 1. Per minimizzare il numero di cifre 1 è sufficiente utilizzare i prezzi più alti possibili (c'è da aspettarsi dodici addendi). La soluzione è $22412 = 2\times 11111+1\times 111+7\times 11+2\times 1$ che utilizza in totale $2\times 5+1\times 3+7\times 2+2\times 1 = 29$ cifre 1.
La risposta è `0029`.

Soluzione del problema 8. Il tabellone (con otto partecipanti) è della forma



Le coppie formate da nomi consecutivi sono $4096 - 1 = 4095$ e nell'albero del tabellone i cammini da due foglie convergono sicuramente (al massimo alla radice). Siccome gli incontri che vengono fatti tra ottavi di finale e finale sono 15, la probabilità che in effetti una coppia di nomi consecutivi si affronti tra ottavi di finale e finale è $\dfrac{15}{4095} = \dfrac{1}{273}$.
La risposta è `0274`.

Soluzione del problema 9. Sappiamo che una soluzione intera deve dividere il termine noto, allora le uniche possibili soluzioni intere sono 1, -1, 3, -3.

- Se $x = 1$ è soluzione, allora $a = 4$ che non è divisibile per 10.
- Se $x = -1$, allora $a = -2$ che non va bene.
- Se $x = 3$ allora $a = 3^4 + 1 = 82$ che non va bene.
- Se $x = -3$ allora $a = 3^4 - 1 = 80$.

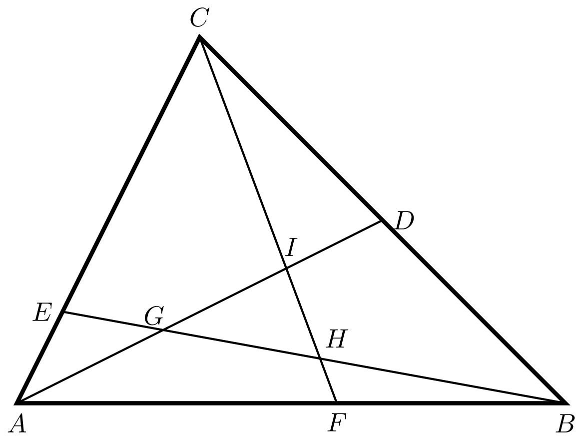
La risposta è `0080`.

Soluzione del problema 10. Non possono essere tutti Positivi perché direbbero il falso, né possono essere tutti Negativi perché direbbero il vero.
Sia P il numero (intero positivo) dei Positivi incluso il re e N il numero (intero positivo) dei Negativi. Poiché ogni Positivo stringe la mano a $P-1$ Positivi sicuramente e dice la verità, deve aver stretto la mano ad almeno P Negativi. Quindi $N \geq P$.
Poiché ogni Negativo stringe la mano a $N-1$ Negativi e dice il falso, deve aver stretto la mano almeno a $N-1$ Positivi. Quindi $P \geq N-1$.

Quindi $N-1 \leq P \leq N$, cioè $P = N$ o $P = N - 1$. Ma $P + N = 2017$, quindi $P = 1008$ e $N = 1009$. Ogni Negativo quindi deve aver stretto la mano a tutti i Positivi, re compreso, che quindi complessivamente ha stretto 2016 mani.
La risposta è `2016`.

Soluzione del problema 11. Se le ruote non si bloccassero mai servirebbero $\text{mcm}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$ giorni. A questo tempo bisogna aggiungere un giorno per ogni volta che almeno una ruota si blocca, cioè 60 meno i numeri tra 1 e 60 che non sono multipli di $2, 3, 4, 5$ e 6, quindi relativamente primi con $2, 3$ e 5, oppure che è lo stesso con 30 che sono $60 - 2 \cdot \phi(30) = 44$. Bisogna fare infine attenzione all'ultimo giorno in cui si bloccano esattamente sulla posizione richiesta. I giorni sono perciò $60 + 44 - 1 = 103$.
La risposta è `0103`.

Soluzione del problema 12.



L'area del triangolo ABC è la somma delle aree dei quattro triangoli GHI, AGB, BHC e CIA. L'altezza del triangolo AGB relativa alla base AG è doppia dell'altezza del triangolo GHI relativa alla base $GI = AG$. Dunque l'area di AGB è doppia di quella di GHI. Così pure per le altre due aree dei triangoli BHC e CIA. Quindi, la superficie del triangolo ABC è 7 volte quella del triangolo GHI. Il rapporto cercato è 1000 volte $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.
La risposta è `0142`.

Soluzione del problema 13. Sia $q(x)$ il polinomio considerato. Ricordiamo che in un polinomio di secondo grado $ax^2 + by + c$ la somma delle radici si calcola come $-\frac{b}{a}$. Nel nostro caso chiaramente $q(x) = 2018x^2 - (2 + 4 + 6 + \ldots + 4034)x + c$ dove il valore di c non ci interessa:

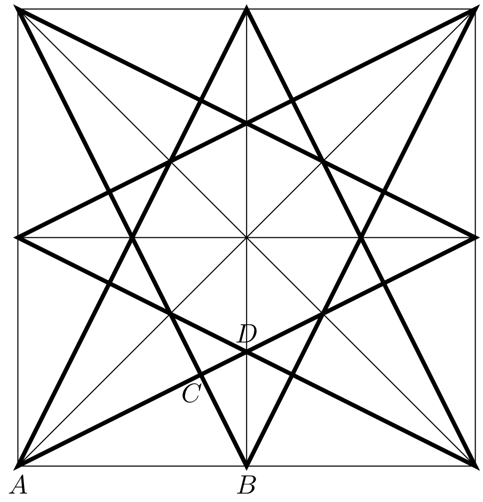
$$2 + 4 + 6 + \ldots + 4034 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 2017) = 2 \cdot \frac{2017 \cdot 2018}{2}.$$

Allora la somma delle radici è $\frac{2017 \cdot 2018}{2018} = 2017$.
La risposta è `2017`.

Soluzione del problema 14. Osserviamo che ogni foglietto conteggiato passa per le mani di esattamente un capitano delle squadre tradizionali: ciascun di loro riceve un foglietto dai capitani femminili che conosce e ne regala uno a quelli che non conosce, cioè ogni capitano in totale maneggia tanti foglietti quante sono le squadre femminili. Per questo motivo il numero totale dei foglietti è esattamente il prodotto tra il numero di squadre femminili e il numero di squadre tradizionali. Dato che $3551 = 53 \cdot 67 = 3551 \cdot 1$ e l'osservazione di Yoda esclude il secondo caso, le squadre presenti sono 120.
La risposta è `0120`.

Soluzione del problema 15. I 5 solidi platonici sono il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Nel tetraedro i segmenti più lunghi sono gli spigoli: 6 segmenti. Nel cubo, i segmenti più lunghi sono le diagonali: 3 segmenti. Nell'ottaedro, ancora le diagonali: 4 segmenti. Nel dodecaedro che nell'icosaedro sono le diagonali che congiungono i vertici più distanti: 6 nel primo, 10 nel secondo. In totale sono $6+3+4+6+10=29$ segmenti.
La risposta è `0029`.

Soluzione del problema 16.



Grazie alle simmetrie del disegno, si può considerare il rapporto tra l'area di uno dei triangoli rettangoli ottenuti tracciando anche le diagonali del quadrato e l'area della parte di stella contenuta in esso. In effetti, la cosa più semplice è calcolare l'area del triangolo rettangolo ABC esterno alla stella in base al lato ℓ del quadrato.
SI ha che $AD = \ell\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}} = \ell\frac{\sqrt{5}}{4}$. I triangoli rettangoli ABC e ABD sono simili. Dunque l'area di ABC è

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{4}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{\ell^2}{20}.$$

Il rapporto richiesto è perciò

$$1-\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{8}} = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

La risposta è `0600`.

Soluzione del problema 17. Dalla cifra della migliaia possiamo ricavare che $4+A=D$ oppure $4+A=D-1$. Dalle unità ricaviamo invece $A=C+1$. Siccome le cifre 3,4 e 6 sono inutilizzabili, abbiamo solo due possibilità: $A=1, C=0, D=5$ oppure $A=2, C=1, D=7$. Ma per il primo dei due non si riesce a trovare B per verificare l'operazione in colonna. Invece per il secondo caso con $B=0$ si ha una soluzione. Pertanto la risposta è 2017.
La risposta è `2017`.

Soluzione del problema 18. Le ultime 3 richieste impongono che

(1) $g^2 \leq r$;

(2) $r^3 \leq b^2$;

(3) $b \leq 5g$.

Si ricava immediatamente che

$$r^3 \leq b^2 \leq (5g)^2 = 25g^2 \leq 25r.$$

Supponiamo per assurdo $r \geq 5$. Quindi $255 \leq r^3$ e le disuguaglianze sono uguaglianze. Così $r^3 - 25r = 0$ e, poiché i tre valori sono interi positivi, $r = 5$; però $b^2 = r^3 = 125$, che è assurdo perché 125 non è un quadrato perfetto. Quindi $0 < r < 5$. Nei casi in cui $r < 4$, per la (1) $g = 1$.
Analizziamo in dettaglio ciascuno dei 4 possibili valori di r:
Se $r = 1$, $g = 1$, dalla (2) e (3), $1 \leq b \leq 5$. Sono accettabili le 5 terne $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 1, 4)$ e $(1, 1, 5)$.
Se $r = 2$, $g = 1$, dalla (2) e (3), $3 \leq b \leq 5$. Sono accettabili le 3 terne $(2, 1, 3)$, $(2, 1, 4)$ e $(2, 1, 5)$.
Se $r = 3$, $g = 1$, dalla (2) si ottiene che $b^2 \geq 27$, cioè che $b \geq 6$, mentre dalla (3) si ha $b \leq 5$. Quindi non c'è nessuna terna accettabile.
Se $r = 4$, dalla (1) si ha $g = 1$ o $g = 2$. Se $g = 1$ analogamente al caso $r = 3$ non abbiamo terne accettabili. Se $g = 2$, dalla (2) e dalla (3) si ha che $8 \leq b \leq 10$; perciò risultano accettabili le 3 terne $(4, 2, 8)$, $(4, 2, 9)$ e $(4, 2, 10)$.
La risposta è quindi $5 + 3 + 3 = 11$.
La risposta è `0011`.

Soluzione del problema 19. Se ℓ è il lato di un trasmettitore, l'area totale è $5 \cdot \ell^2$. Dunque, $5500 \leq 5 \cdot \ell^2 \leq 6000$, cioè $1100 \leq \ell^2 \leq 1200$ e $\sqrt{1100} \leq \ell \leq \sqrt{1200}$. Dato che $\sqrt{1100} \approx 33.17$ e $\sqrt{1200} \approx 34.64$, la risposta è 34.
La risposta è `0034`.

Soluzione del problema 20. $f(100) + 2f(\frac{1}{100}) = \frac{1}{100}$. Ma $f(\frac{1}{100}) + 2f(100) = 100$.
Risolvendo il sistema si ottiene $f(100) = \frac{19999}{300}$, da cui $100 \cdot f(100) = 6666, \overline{3}$.
La risposta è `6666`.

Soluzione del problema 21. Sia p_n il prodotto $\prod_{i=1}^{6}(n+i)$. In una sequenza di sei numeri consecutivi, ci sono almeo un multiplo di 4 e altri due multipli di 2, perciò $2^4 \mid p_n$. Cancellare 0 a destra equivale a prendere il quoziente nella divisione con 10 quando il resto è nullo; per ottenere un numero dispari è sufficiente che $5^4 \mid p_n$ e $2^5 \not| \, p_n$.
Esplicitando le potenze di 2 e di 5 in una decina di numeri naturali consecutivi si ottiene uno schema come il seguente

$$D_1 \quad D_2 \cdot 2^{k_1} \quad D_3 \quad D_4 \cdot 2^{k_2} \quad D_5 \cdot 5^{j_1} \quad D_6 \cdot 2^{k_3} \quad D_7 \quad D_8 \cdot 2^{k_4} \quad D_9 \quad D_{10} \cdot 2^{k_1} \cdot 5^{j_2}$$

dove i D_i sono dispari e se uno dei due esponenti $j_\ell \geq 2$ allora l'altro è 1.
Si testano a questo punto i gruppi di sei numeri che includono un multiplo di $5^3 = 125$ e un altro multiplo di 5 e che non includano multipli di $2^3 = 8$. Ma 120 e 128 sono multipli di 8, mentre i multipli di 8 intorno a 250 sono 248 e 256. Così

$$250 \cdot 251 \cdot 252 \cdot 253 \cdot 254 \cdot 255 = 2 \cdot 5^3 \cdot 251 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 127 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 259124626530000$$

La soluzione è 249.
La risposta è `0249`.

Soluzione del problema 22. Dopo 1764 anni, il volume riempito è $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ del cono; il volume da completare è $\frac{1}{8}$. Quindi, per completare il riempimento ci vorranno $1764 \cdot \frac{8}{7} \frac{1}{8} = 1764 \cdot \frac{1}{7} = 252$ anni.
La risposta è `0252`.

Soluzione del problema 23. Si considerino i vertici dei quadrati della scacchiera come i punti a coordinate intere non negative inferiori a 11 del piano cartesiano, diciamo che il colore giallo agisce sulle ascisse. Si consideri il pedone nel vertice $(0,0)$. Siano (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) i risultati dei tre lanci. Il pedone arriva in $(10,10)$ in tre lanci se e solo se

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \qquad \text{e} \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 10.$$

A meno dell'ordine le terne di numeri compresi tra 1 e 6 che sommano a 10 sono

$$(1,3,6) \quad (1,4,5) \quad (2,3,5) \quad (3,3,4) \quad (2,2,6) \quad (2,4,4).$$

Le terne ordinate prodotte da ciascuna dalle prime tre sono 6, le terne prodotte da ciascuna dalle ultime tre sono 3; in totale sono 27. Tutte le terne di lanci possibili sono 6^3; di conseguenza la probabilità di vittoria sono

$$\frac{3^3}{6^3} \cdot \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{2^6}$$

La risposta è `0065`.

Soluzione del problema 24. Chiaramente se un abitante dell'isola n è di una certa indole anche gli altri $n-1$ lo sono perché pronunciano tutti la stessa strofa.
Consideriamo l'isola 97. Essendo un numero primo essa è collegata solo all'isola 1. Ora, sia che l'abitante sull'isola 1 abbia indole O o C, i 97 abitanti dell'isola 97 dicono il vero e sono di indole C. Ne segue che l'abitante dell'isola 1 mente ed è quindi O. [Lo stesso argomento si applica per ogni isola numero primo maggiore di 50.]
Dimostriamo ora che, per n compreso tra 1 e 50 tale che, per ogni $m < n$, tutti gli m abitanti dell'isola m sono O, gli n abitanti dell'isola n sono O.
Supponiamo per assurdo che siano C. Ne segue che tutte le isole "multiple" di n sono composte da O; in particolare l'isola $2n$. Quindi nelle isole linkate all'isola $2n$ (quelle contrassegnate da un multiplo o da un divisore di $2n$, diverso da $2n$) vi sono più di $2n$ con indole C. Ma se m è multiplo di $2n$ lo è anche di n, quindi l'isola m è composta solo da abitanti O come già notato. Del resto i divisori di $2n$ (diversi da $2n$) sono n e numeri minori di n che, per ipotesi, sono isole composte da abitanti O. Quindi le isole linkate all'isola $2n$ hanno solo n abitanti C—quelli dell'isola n—, che è assurdo perché $n < 2n$.
Poiché l'isola 1 è composta da abitanti O, per induzione, le isole da 1 a 50 sono composte da abitanti O.
Sia ora n compreso tra 51 e 100. Poiché $50 \geq \frac{n}{2}$, tutti i divisori di n diversi da n sono compresi tra 1 e 50. Siccome non esistono multipli di n diversi da n e minori di 100, gli abitanti delle isole linkate all'isola n sono tutti O e quindi gli abitanti dell'isola n tutti C.
Riassumendo, le isole da 1 a 50 sono composte da abitanti O mentre quelle da 51 a 100 da abitanti C. La risposta è quindi

$$\sum_{i=51}^{100} i = \sum_{i=1}^{50} i + 50 \cdot 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} + 2500 = 1275 + 2500 = 3775.$$

La risposta è `3775`.