

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.

- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad \sqrt{3} = 1,7321 \quad \sqrt{7} = 2,6458 \quad \pi = 3,1416.$$

9 Marzo 2012

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. Il Giardino Fiorito

(punti 20)

Il Giardino Fiorito del castello è di forma triangolare, delimitato da tre sentieri rettilinei che collegano le tre porte di accesso, una su ciascun vertice, denominate Porta Alba, Porta Bianca e Porta Chiara in onore della carnagione della principessa. Biancaneve sta passeggiando all'interno del Giardino Fiorito; si trova a metà strada sul sentiero rettilineo che collega Porta Bianca e Porta Chiara, da lì vede due guardie della Regina, una a Porta Bianca, l'altra a Porta Chiara. Per evitarle, si dirige allora verso Porta Alba, ma, quando giunge a metà strada, una guardia compare su quella porta. Spaventata, Biancaneve si ferma e non si accorge che le cade il fazzoletto. Vede che non c'è più la guardia a Porta Bianca. Si dirige perciò verso quella, ma, quando giunge a metà strada, la guardia ricompare sulla porta. Spaventata, Biancaneve si ferma e non si accorge che le cade lo scialle. Vede che non c'è più la guardia a Porta Alba. Si dirige dunque verso quella. Giunta a metà strada, si rende conto di aver perso il fazzoletto e lo scialle e li vede nei punti in cui si era fermata in precedenza. Per valutare quanto tempo impiegherà per raccogliarli, Biancaneve calcola il rapporto tra l'area del Giardino Fiorito e l'area del triangolo formato da lei, dal fazzoletto e dallo scialle. Che numero trova?

2. Il primo esercizio di Dotto

(punti 20)

Dotto si sta esercitando con i numeri. Ha preso la funzione

$$f(n) = \frac{200 - 2n}{n}$$

e ha calcolato le ultime due cifre (cioè le due più a destra) del prodotto $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(99)$. Che cosa ha trovato?

3. La truffa sventata

(punti 20)

L'orefice di corte ha preparato per la Regina un globo d'oro e argento che ha una massa di 300g ed un volume di 20cm^3 . La Regina si lamenta dicendo che c'è più argento che oro. L'orefice si difende dicendo che la densità dell'oro è 19g/cm^3 , quella dell'argento è 10g/cm^3 . La Regina nota che, proprio per questo, ha ragione lei. Qual è il rapporto, moltiplicato per 1000, tra il volume di oro e quello di argento nella palla?

4. Il secondo esercizio di Dotto (punti 30)

Dotto continua ad esercitarsi con i numeri: ha inventato una nuova operazione tra numeri interi. Moltiplica la cifra delle unità del primo numero per la cifra delle unità del secondo numero, poi, se il risultato è maggiore di 9, ne somma le cifre, e in caso questo nuovo numero sia maggiore di 9, ne somma ancora le cifre, finché ottiene un numero con una sola cifra. Questa è la cifra delle unità del numero risultato della nuova operazione. Allo stesso modo si opera con la cifra delle decine, quella delle centinaia, e così via. Quante sono le coppie (non ordinate) di numeri che hanno come risultato 1357?

5. Il poligono di Pisolo (punti 30)

In un poligono regolare di 30 lati, Pisolo numera tutti i vertici da 1 a 30. Appoggia poi 15 dischi circolari di raggio uguale al lato del poligono con i centri sui vertici numerati con un numero dispari. Ogni disco ha la circonferenza lunga 20cm. Qual è il perimetro esterno della figura?

6. Il cucciolo sgarzulino (punti 30)

Cucciolo chiama *sgarzulini* i numeri naturali formati solo da cifre 1. Quante cifre ha il più piccolo numero sgarzulino maggiore di 1 tale che il numero dei suoi divisori sgarzulini sia un numero sgarzulino?

7. Il terzo esercizio di Dotto (punti 30)

Dotto scrive la seguente operazione

$$\text{Pera} + \text{Pesca} = \text{Frutti}$$

e spiega agli altri nani che ha sostituito a ogni cifra una lettera, a lettere diverse corrispondono cifre diverse. Una lettera all'inizio di una parola perciò non corrisponde alla cifra 0. Che cifre scrive Dotto quando scrive *case*?

8. La più bella del reame (punti 30)

L'algoritmo con cui lo Specchio Magico calcola chi sia "la più bella del reame" prescrive di inserire i 16 numeri

$$1, 2, 3, 4, 10, 20, 30, 40, 100, 200, 300, 400, 600, 700, 800, 900$$

in una griglia 4×4 . Oggi le somme delle 4 righe della griglia valgono (a partire dall'alto)

$$920, 1003, 1313, 874$$

mentre le somme delle 4 colonne (a partire da sinistra) sono

$$2230, 461, 109, 1310.$$

La somma dei 4 numeri che occupano la diagonale della griglia che va dalla posizione in alto a sinistra alla posizione in basso a destra determina l'identità della più bella di oggi: qual è la somma oggi?

9. La magia della Regina**(punti 30)**

Per poter eseguire un rito magico, la Regina deve trovare il numero delle quadruple (x, y, z, t) di numeri reali tali che

$$\begin{cases} x^2y^2 + z^2t^2 = 1 \\ x^2z^2 + t^2y^2 = 1 \\ x^2t^2 + y^2z^2 = 1 \\ xyzt = 0 \end{cases}$$

Quante sono?

10. La cavalcata del Principe Azzurro**(punti 30)**

Il Principe Azzurro deve raggiungere l'altro capo della Foresta con il suo cavallo ed è appena giunto ad un incrocio. Una strada passa sopra un fiume con un ponte pericolante che ha la probabilità del 30% di crollare al passaggio di un cavallo, mentre ognuna delle altre due strade passa sopra due fiumi con due ponti consecutivi, ciascuno dei quali ha la probabilità del 20% di cadere al passaggio di un cavallo. Il Principe non sa quale strada abbia un solo ponte o quale ne abbia due. Se il Principe sceglie a caso la strada, che probabilità c'è che attraversi il bosco?

Si risponda con il numeratore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime tale probabilità.

11. Il poligono di Brontolo**(punti 40)**

Brontolo disegna un poligono regolare di 21 lati. Poi traccia tutte le diagonali e conta tutti i punti, interni al poligono, che sono intersezione di tali diagonali. Quanti punti conta?

12. Il quarto esercizio di Dotto**(punti 40)**

Stavolta Dotto considera l'equazione

$$3i^2 + 2j^2 = 77 \cdot 6^{2012}$$

e determina quante soluzioni intere (i, j) essa abbia. Quante sono?

13. Gongolo platonico**(punti 40)**

Gongolo ha davanti una copia di ciascuno dei cinque solidi regolari. Guardandoli uno per uno si immagina come tracciare, in ciascuno di essi, tutti i segmenti più lunghi possibile. Quanti sono, in totale, tali segmenti?

14. I mattoncini ordinati **(punti 40)**

Eolo e Mammolo decidono di fare un gioco insieme, mettendo in ordine mattoncini quadrati, tutti delle stesse dimensioni. Eolo li impila, Mammolo fa muretti quadrati. Eolo inizia con una pila di un mattoncino, Mammolo con un quadrato di un mattoncino (la stessa cosa). Al secondo turno, Eolo fa una pila di due mattoncini, Mammolo un quadrato di quattro mattoncini. Al terzo turno, Eolo fa una pila di tre mattoncini, Mammolo un quadrato di nove mattoncini. Si rendono conto di aver ordinato 20 mattoncini. Decidono di continuare fino al turno quando avranno messo in ordine un numero di mattoncini multiplo di 2012. A quale turno si fermano?

15. Il quinto esercizio di Dotto **(punti 40)**

Dotto si esercita ancora con i numeri. Ha davanti 10 scatole, numerate da 1 a 10. Inserisce nella scatola n. 1 un numero scelto tra $-1, 0, 1$ e 2 ; analogamente, anche nella scatola n. 2 inserisce uno dei numeri $-1, 0, 1, 2$ ecc. fino a riempire tutte le scatole. Poi fa il prodotto dei 10 numeri così inseriti e scrive il numero ottenuto sulla lavagna. Ripete l'operazione inserendo nelle scatole di nuovo i numeri $-1, 0, 1, 2$ in un modo diverso dal precedente, e scrive il prodotto ottenuto sulla lavagna, a fianco del primo. Continua inserendo i numeri $-1, 0, 1, 2$ in tutti i modi possibili nelle dieci scatole e scrivendo via via il prodotto ottenuto a fianco degli altri. Infine calcola la somma di tutti i numeri scritti sulla lavagna. Che numero trova?

16. Le guardie accecate **(punti 50)**

In un campo quadrato di lato 200m sono stati piantati dei pali verticali, di forma cilindrica, tutti uguali tra loro. Due qualunque di essi distano non meno di 2m. Le tre guardie della Regina entrano nel campo e si posizionano in 3 punti distinti. Dal proprio punto di osservazione, guardando in tutte le direzioni, ciascuna delle guardie dice di vedere esattamente 3 pali, tutti gli altri restano nascosti. Quanti pali ci sono al massimo nel campo?

17. La strategia di Mammolo **(punti 50)**

Il casinò del regno ha introdotto un nuovo gioco: il giocatore lancia un classico dado a 6 facce, il banco quindi chiede al giocatore se vuole ritirare il dado, o essere pagato con una somma pari al risultato del dado, e fermarsi. Se si sceglie di ritirare il dado, il banco ripete la domanda, fino a un massimo di 6 lanci totali, quando si è costretti ad accettare il risultato del sesto lancio. Mammolo ha trovato la strategia che permette di incassare il più possibile. Qual è la vincita media della strategia trovata da Mammolo?

Si risponda con il numeratore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime la vincita media.

18. Le tangenti di Brontolo (punti 60)

Esercitandosi per il taglio dei diamanti, Brontolo disegna, su un piccolo foglio quadrato di lato 2cm, una circonferenza tangente ai lati del foglio. Disegna poi una seconda circonferenza, esterna alla prima e tangente ad essa e a due lati del foglio; ne disegna poi una terza, esterna alle prime due, ma tangente alla seconda e a due lati del foglio, e così via. Brontolo si ferma quando disegna la prima circonferenza con raggio inferiore a un millesimo di millimetro, quante circonferenze sono disegnate sul foglio?

19. La fiaba di Biancaneve (punti 60)

Biancaneve racconta una nuova fiaba dell'Isola Kenoncé di cavalieri e furfanti (i cavalieri dicono sempre il vero, i furfanti sempre il falso): la fiaba del censimento statistico sull'Isola Kenoncé. Gli operatori dell'Ufficio Censimento entrano in un bar e rivolgono la stessa domanda a cinque avventori: «Quanti sono i furfanti su quest'isola?» Ricevono le seguenti risposte:

- Il loro numero diviso per 56 dà come resto 19
- Il loro numero diviso per 132 dà come resto 23
- Il loro numero diviso per 105 dà come resto 13
- Il loro numero diviso per 162 dà come resto 17
- Il loro numero diviso per 156 dà come resto 37

Il barista, un cavaliere, interviene e dice: «Gli abitanti dell'isola sono diecimila e le informazioni date dei cavalieri presenti permettono di stabilire la risposta in modo unico». Grazie al suo allenamento con i numeri, Dotto calcola quanti sono i furfanti e interrompe Biancaneve per dirlo, rovinando così la fiaba. Che numero dice Dotto?

20. Il vessillo della Regina (punti 60)

Il vessillo reale è un triangolo diviso in 3 triangoli di colori diversi e con 4 diamanti, uno in ciascun vertice. La Regina vuole farlo cambiare usando più triangoli; il Re acconsente, ma impone che vengano usati un numero di triangoli superiore a 3 e che siano mantenute le proprietà regali di quello originario: deve essere un triangolo diviso in a triangoli, con un diamante in ogni vertice; ogni lato deve contenere solo due diamanti (i due ai suoi vertici) e, in ciascun vertice della figura, si devono incontrare lo stesso numero di lati (il numero di lati che si incontrano in un medesimo vertice del vessillo originario è tre). Qual è la somma dei numeri a che la Regina può scegliere?

[**Attenzione:** la proprietà non richiede che il numero di lati che si incontrano in un medesimo vertice coincida con il numero di triangoli usati.]

21. Le letture di Biancaneve e i sette nani (punti 70)

Biancaneve e i sette nani sono seduti attorno ad un tavolo circolare, ed ognuno impila sul tavolo davanti a sé un certo numero di libri, tra 2 e 9 (estremi inclusi). Si accorgono che, presi comunque due di loro seduti adiacenti, il numero di libri davanti a uno dei due divide il numero di libri davanti all'altro. Dotto ha 9 libri sul tavolo davanti a sé, perciò Biancaneve, che siede al suo fianco sinistro, ha 3 oppure 9 libri davanti. In quanti modi possibili si può ottenere la distribuzione di libri sul tavolo?

22. La mela avvelenata (punti 70)

Per convincere Biancaneve a mangiare la mela (che appare sospetta perché perfettamente sferica dopo il bagno nella pozione magica), la strega la taglia in pezzi, in modo che ogni taglio passi per il centro. Quanti pezzi di mela, al massimo, può ottenere dopo 7 tagli?

23. La bara di Biancaneve (punti 70)

Per conservare il corpo morto di Biancaneve, i sette nani stanno lavorando alacremente per dividere in tre zone una grande area quadrata recintata di lato 1 km, usando soltanto tre tratti di staccionata rettilinea. Appena arrivato, il Principe Azzurro si accorge che c'è una distanza ℓ massima con la proprietà che, comunque si esegua una tale divisione (usando cioè tre tratti di staccionata di lunghezza appropriata, ma senza che uno sia sovrapposto ad un altro), in una delle tre zone ci sono due punti distanti almeno ℓ . Prima di baciare Biancaneve, il Principe Azzurro dice ai sette nani il valore di ℓ . Quanto misura, in millimetri, la differenza tra tale distanza ℓ e il lato del recinto?

24. La fine della Regina (punti 70)

Biancaneve, i sette nani e il Principe Azzurro lasciano che sia il caso a determinare la sorte della Regina. Prendono un cubo, marcano i tre lati del cubo che passano per lo stesso vertice A con 0, 1 e 2. Marcano poi tutti i rimanenti lati con il numero già scritto su un lato parallelo. Successivamente, inseriscono nel punto A un "segnaposto". La Regina deve lanciare un dado a 6 facce non truccato. Se il risultato del lancio del dado è n , si divide n per 3. Se il resto è 0, fa scorrere il segnaposto da A lungo il lato 0 fino a raggiungere l'altro vertice; analogamente, se il resto è 1 o 2, fa scorrere il segnaposto lungo il lato 1 o 2. Ad ogni lancio successivo del dado, si muove il segnaposto con lo stesso criterio. Se, dopo un numero totale di 10 lanci, il segnaposto si trova in A , la Regina dovrà calzare due scarpe di ferro arroventate. Qual è la probabilità che la Regina calzi le scarpe arroventate?

Si risponda con il numeratore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime tale probabilità.