Soluzioni per la Coppa Fermat 2008

Le note, scritte da Agnes Nutter nel XVII secolo, contenevano, tra varie altre incongruenze, una lista di frasi di chiaro contenuto matematico, ma di nessun significato immediato. Per una coincidenza che appare incredibile, una larga parte di quelle frasi si adattano quasi perfettamente a descrivere le soluzioni dei 24 problemi proposti nella gara a squadre. Le elenchiamo nel seguito indicando a quale problema pensiamo si riferiscono.

Soluzione del problema 1 (Il pranzo dei cavalieri dell'Apocalisse) I rapporti dei prezzi sono

Carestia	Guerra	Inquinamento	Morte
4	3	2	3

Il pasto meno caro è quello di Inquinamento; il più caro è quello di Carestia che ha pagato $\frac{4}{2}6.80$**€** $= 13.60$**€**.

Soluzione del problema 2 (I due cori) Sia $T = 7869$, siano t i membri del coro dei tibetani ed a quelli del coro degli atlantidi. I membri in comune sono $c = \frac{3}{10}t = \frac{8}{10}a$ e $a + t = T + c$. Perciò $t = \frac{8}{3}a$ e $a + \frac{8}{3}a - \frac{8}{10}a = T$. Così $a = \frac{15}{43}T = 2745$.

Soluzione del problema 3 (I numeri dell'Apocalisse) Ci sono $4! = 24$ numeri possibili. Se il numero da trovare è un multiplo di un altro numero ottenuto con quelle cifre, il quoto tra i due è al massimo 3 perché $2457 \times 4 = 9828$. Non può terminare con 7. Se il numero da trovare termina con 5, il divisore termina con 5 e il quoto è 3; se termina con 2, il divisore termina con 4 e il quoto è ancora 3; se termina con 4, il divisore termina con 2 e il quoto è 2. L'ultimo caso è impossibile, dato che la prima cifra non può essere minore di 3. Nei due casi rimasti, il divisore deve iniziare con 2. Del resto, la penultima cifra del multiplo è il successore dell'ultima cifra della moltiplicazione per 3 di 4, 5, o 7. L'unica possibile è 7. In effetti, dopo la riduzione a due casi, i tentativi restano quattro:

$$\begin{aligned} 2475 \times 3 &= 7425 \\ 2745 \times 3 &= 8235 \\ 2574 \times 3 &= 7722 \\ 2754 \times 3 &= 8262 \end{aligned}$$

Soluzione del problema 4 (Le pietre degli Inferi) Le pietre siano n, la pietra k pesa p_k t. Il caso peggiore possibile è che ogni coppia di pietre pesi di più di 1 t. Di conseguenza, al massimo una pietra pesa meno di $\frac{1}{2}$ t, diciamo la pietra 1. Così $100 = \sum_{k=1}^{n} p_k = (p_1 + p_2) + \sum_{k=3}^{n} p_k > 1 + (n-2)\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$. Perciò $n \geq 199$ e il valore 199 è effettivamente ottenibile con $p_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{199}$.

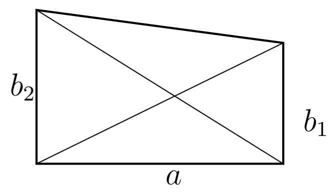
Soluzione del problema 5 (Cocktail letale) $\frac{2 \cdot 45 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 0}{4} = 32.5$

Soluzione del problema 6 (Allo zoo di Tadfield, I) La situazione è schematizzata dalla matrice

	A	B	C	D	E
gialla					
blu	X				X
verde		X	X		X
rossa	X		X	X	

Le due scimmie con la maglietta rossa devono essere Berto ed Erto. Dunque, solo Certo o Derto possono essere la scimmia che indossa la maglietta blu. Supposto che Alberto indossi la maglietta verde, non può essere comunque vicino ad una scimmia con la maglietta blu. Dunque Derto deve indossare una maglietta verde (e Certo indossa la maglietta blu). Si noti che Alberto può indossare sia una maglietta gialla che una maglietta verde (ma il problema non richiede nulla su di essa).

Soluzione del problema 7 (Il quadrilatero divino) Siano $b_1 = 66\,\mathrm{m}$, $b_2 = 84\,\mathrm{m}$ e $a = 135\,\mathrm{m}$.



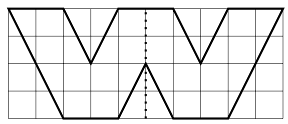
Il punto sul trapezio più lontano dal punto di incontro delle diagonali è l'intersezione della base maggiore con il lato obliquo. La distanza p tra questi si ottiene dalla similitudine dei triangoli formati con il punto di incontro delle diagonali e con una base in comune col trapezio. Visto che la diagonale maggiore è lunga $d = \sqrt{b_2^2 + a^2} = 159\,\mathrm{m}$, si ha che $p = b_2 \frac{d}{b_1+b_2}$ e la lunghezza precisa è $89,04\,\mathrm{m}$.

Soluzione del problema 8 (Davanti al laboratorio *Ell*, I) L'area coperta dalla vernice è uguale alla superficie totale del cilindro: $2\pi(1\,\mathrm{m})^2 + \pi 2\,\mathrm{m} \cdot 6\,\mathrm{m} = 14\pi\,\mathrm{m}^2 \approx 43,98\,\mathrm{m}^2 = 4398\,\mathrm{dm}^2$

Soluzione del problema 9 (La stella di Adam) Sommando le ampiezze degli angoli dei cinque triangoli formati da una coppia di punte e un vertice del pentagono all'interno della stella, si trova che la somma delle ampiezze dei cinque angoli nelle punte è $\frac{5\cdot180-3\cdot180}{2} = 180$ dato che si devono togliere gli angoli nei vertici del pentagono. Uno dei quattro uguali vale $\frac{180-12}{4} = 42°$.

Soluzione del problema 10 (Il foglio di Pepper) Il massimo si ottiene tagliando a metà sempre lo stesso lato, il minimo quando si taglia alternativamente un lato e poi l'altro. Perciò il lato lungo poteva essere $88\cdot2^5$ mm oppure $62\cdot2^3$ mm e la differenza in mmè $(88\cdot4-62)\cdot2^3 = (352-62)\cdot2^3 = 2320$.

Soluzione del problema 11 (L'iniziale di Wensleydale) Considerata metà W si vede che sta in un rettangolo $10\,\mathrm{cm} \times 8\,\mathrm{cm}$ e l'area fuori dalla W è composta da 7 triangoli rettangoli con cateti di 4 cm e 2 cm. Perciò l'area della W è $2(80-7\cdot4)\,\mathrm{cm}^2 = 104\,\mathrm{cm}^2$.
Facendo il disegno su carta quadrettata, uno se la può cavare in fretta con il teorema di Pick:



Soluzione del problema 12 (Il passatempo di Brian) Sia $k^2 = 2^{2008} + 2^{3599} + 2^n = 2^{2008}(1+2^{1591}) + 2^n$. Posto $a = \frac{k}{2^{1004}}$, si ha che $2^{n-2008} = a^2 - (1+2^{1591})$. Perciò a è dispari, diciamo $a = 2b-1$, e $2^{1589}(2^{n-3599}-1) = b(b-1)$. Se b è pari, si trova $n = 5188$; il caso b dispari è impossibile.

Soluzione del problema 13 (I loro compleanni) $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7^4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{7^3} = \dfrac{120}{343}$

Soluzione del problema 14 (Lo scrigno della strega) Dato che $100^2 = 10000$, il numero n^2 cercato deve essere ottenuto da $n = 10a+b$ con $a \neq 0$ e b cifre. Allora $n^2 = 10(10a^2+2ab)+b^2$. La cifra delle decine di b^2 deve essere dispari. Allora la cifra delle unità di n^2 è 6 e b è 4 oppure 6. La cifra delle decine di n^2 deve essere 5 e la si calcola come cifra delle unità del numero $2ab+c$ dove c è la cifra delle decine di b^2, dunque $c = 1$ se $b = 4$, e $c = 3$ se $b = 6$. Per cercare il massimo n^2 di quattro cifre, si trova che $a = 8$ produce la condizione cercata per $b = 4$.

Soluzione del problema 15 (La ricerca di Aziraphale) I multipli di 1792 sono 1792, 3584, 5376, 7168, 8960. Perciò un numero compreso tra 1000 e 9999 che verifica le condizioni richieste deve avere, in ogni posizione, cifre diverse da quelle dei multipli di 1792:

- in prima posizione può avere soltanto 2, 4, 6, 9
- in seconda posizione può avere soltanto 0, 2, 4, 6, 8
- in terza posizione può avere soltanto 0, 1, 2, 3, 4, 5
- in quarta posizione può avere soltanto 1, 3, 5, 7, 9

Il minimo che verifica la proprietà è 2001, il massimo è 9859: la risposta è $9859 - 2001 = 7858$.

Soluzione del problema 16 (Il giardino di Tadfield) Sia $A = 85\,\mathrm{m}^2$. I centri delle circonferenze sono necessariamente sulla bisettrice dei due vialetti e il raggio di una circonferenza è metà della distanza del centro dall'ingresso. Così il rapporto tra il raggio di una circonferenza e quello della successiva è $\frac{1}{3}$. L'area richiesta è $A(1 + 3^2 + 3^4) = 91A = 7735\,\mathrm{m}^2$.

Soluzione del problema 17 (Allo zoo di Tadfield, II) La situazione è sempre schematizzata dalla matrice

	A	B	C	D	E
gialla(1)					
blu (2)	**X**				**X**
verde (2)		**X**	**X**		**X**
rossa (3)	**X**		**X**	**X**	

L'odio per il rosso e quello per il verde sono indipendenti. Almeno due di queste devono essere indossate. I casi sono $\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 1 + 4 + 6 = 11$:

1. se sono A, B, D e E che indossano quei colori, il resto si completa in 2 modi

2-3. se sono A (o E), B e D, il resto si completa in 1 modo

4-5. se sono A, B (o D) e E, il resto si completa in 3 modi

5. se sono A e E, il resto si completa in 3 modi

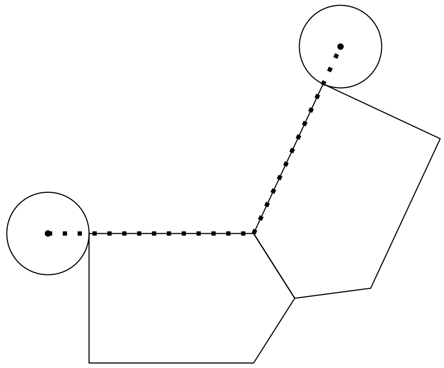
6. se sono B e D, il resto non si può completare

8-9. se sono B (o D) e E, il resto si completa in 1 modo

10-11. se sono A e B (o D), il resto si completa in 1 modo

Il totale è $2 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 + 0 + 2 \times 1 + 2 \times 1 = 17$

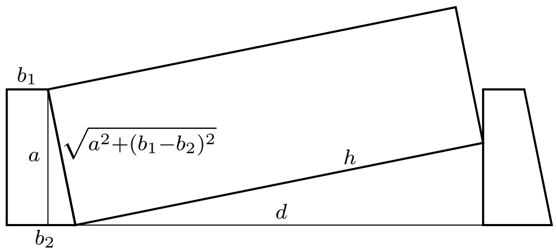
Soluzione del problema 18 (Davanti al laboratorio *Ell*, II) Srotolando la superficie esterna della **L** si ottiene la figura



Il percorso più breve è mostrato in figura; la sua lunghezza si calcola dopo aver calcolato la distanza minima da un punto della circonferenza al taglio che è $\frac{6-2}{2}$ m. La lunghezza del percorso è $2[1\,\mathrm{m} + \frac{6-2}{2}\,\mathrm{m}] = 6\,\mathrm{m} = 6000\,\mathrm{mm}$.

Soluzione del problema 19 (Il passatempo di Warlock) Sia n il numero elevato alla 14-esima potenza. Le cifre di n^{14} sono trenta. 100^{14} ha ventinove cifre e $150^{14} = (2.25)^7 \times 10^{14} > 2^7 \times 10^{14} = 1.28 \times 10^{30}$. Perciò il numero cercato è di tre cifre e la prima è 1. L'ultima cifra di n deve essere 1 o 9. La seconda può essere 1 o 6, ma 161 è maggiore di 150. Non è divisibile per 3. Di conseguenza, $n = 119$.

Soluzione del problema 20 (I megaliti dell'Apocalisse) Siano $a = 2,4\,\mathrm{m} = 240\,\mathrm{cm}$, $l = 20\,\mathrm{km}$, $h = 3\,\mathrm{m}$, $b_1 = 58\,\mathrm{cm}$ e $b_2 = 128\,\mathrm{cm}$. Il megalito caduto è almeno nella posizione in figura



Grazie alla similitudine tra i triangoli rettangoli con cateti maggiori d e a rispettivamente, la distanza d tra i due vertici di base più vicini di due mattoni è $\frac{h}{\sqrt{a^2+(b_1-b_2)^2}}a$. Il numero massimo k è tale che $k - 1 < \frac{l-b_2}{d+b_2} \leq k$, cioè $\left\lceil \frac{l-b_2}{d+b_2} \right\rceil$; così $d = 288\,\mathrm{cm}$ e $k = 4808$.

Soluzione del problema 21 (Il poker ineffabile) Le entità sono 1, 2,. . . , 10, disposti in ordine crescente in senso orario nella configurazione iniziale. La prima osservazione è che possono esserci soltanto scambi digiunti, perché, se, diciamo, 1 si siede al posto di 2 e 2 al posto di 3, allora 3 è costretto a sedersi al posto di 4 e così via, riottienendo la configurazione iniziale. Quindi ci possono essere al più 5 scambi, che si determinano decidendo qual è il primo giocatore della coppia in senso orario:

0 scambi: la configurazione iniziale, da escludere

1 scambio: le possibili coppie adiacenti che si possono scambiare sono 10

2 scambi: scelto il primo scambio, in 10 modi diversi, il secondo si può scegliere tra 7 modi tra gli otto giocatori rimasti perché l'ottavo giocatore non può essere il primo di una coppia. Le scelte sono contate due volte: sono $\frac{7 \cdot 10}{2} = 35$

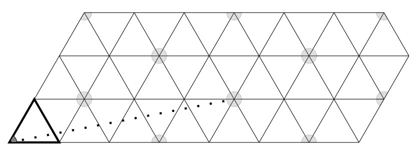
3 scambi: scelti il primo scambio in 10 modi, il secondo ed il terzo si scelgono prendendo due giocatori non adiacenti tra gli altri 7 (ancora l'ottavo è escluso); fissato il primo scambio come (1 2), se il secondo è determinato da 3, allora il terzo può essere scelto in 5 modi, e così via. Le scelte sono contate tre volte: sono $\frac{10 \cdot (5+4+3+2+1)}{3} = 50$

4 scambi: 2 persone rimangono sedute al proprio posto e sono separate da un numero pari di posti. Se 1 sta seduto al suo posto, l'altro può essere scelto in 5 modi; se 2 sta seduto, l'altro può essere scelto in 4 modi così come per 3, e così via: sono $15 + 10 = 25$.

5 scambi: sono soltanto 2 possibilità, scambiando (1 2) oppure (1 10).

Sommando le possibili configurazioni sono $10 + 35 + 50 + 25 + 2 = 122$.

Soluzione del problema 22 (Il biliardo triangolare) Per vedere come far rimbalzare la palla conviene "riflettere" il biliardo (nel disegno non sono indicate le altre buche!):



E' necessario escludere i percorsi che inizino "paralleli" ad una sponda perché la palla finirebbe in un'altra buca, è pure necessario escludere il percorso perpendicolare alla sponda opposta che manderebbe la palla in buca con un singolo rimbalzo. Uno dei percorsi più brevi si vede in figura: è lungo $\sqrt{81+3} = 2\sqrt{3}\sqrt{7} \approx 9.165$ (con i valori approssimati comunicati nel testo, il calcolo produce 9.16558036, usando con precisione superiore il calcolo produce 9.16515139: in ogni caso la risposta è 0916).

Soluzione del problema 23 (Allo zoo di Tadfield, III) La situazione è stavolta schematizzata dalla matrice

	A	B	C	D	E
gialla(1)					
blu (2)					
verde (2)					
rossa (3)					

Le possibili scelte di cinque magliette sono:

- 1 gialla, 2 tra due degli altri tre colori: le scelte possibili di colori sono 3, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{2!2!} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ modi.
- 1 gialla, 1 tra due altri colori, 2 nell'ultimo colore: le scelte possibili di colori sono 3, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modi.
- 1 gialla, 1 blu o verde, 3 rosse: le scelte possibili di colori sono 2, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ modi.

- nessuna gialla, 2 blu o verdi, 3 rosse: le scelte possibili di colori sono 2, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{3!2!} = 5 \cdot 2 = 10$ modi.
- nessuna gialla, 2 tra due colori, 1 nell'ultimo colore: le scelte possibili di colori sono 3, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{2!2!} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ modi.
- nessuna gialla, 1 blu, 1 verde, 3 rosse: le scelte possibili di colori sono 1, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ modi.

In totale, le possibili scelte sono $30 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 1 = 440$.

Soluzione del problema 24 (La profezia di Agnes Nutter) Supposta 6 vera, 2 e 5 sono false. Dunque una tra 3 o 4 è vera. ↯
Dunque 6 è falsa e 1 è falsa. Inoltre al massimo due sono false tra 2, 3, 4, 5.
Supposte 2 e 5 false, una tra 3 o 4 è vera, cioè almeno tre sono false tra 2, 3, 4, 5. ↯
Dunque una tra 2 e 5 è vera. Supposta 2 vera, 3, 4, 5 sono false. ↯
Dunque, 2 è falsa, 5 è vera, così come 3 e 4.
9 è vera se e solo se 10 è falsa. Perciò 11 è falsa. Ne segue che 13 non può essere vera. Perciò 13 è falsa e 12 è vera. La situazione è la seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
falsa	falsa	vera	vera	vera	falsa					falsa	vera	falsa

e

- $N - 1$ è divisibile per 3
- $N + 12$ è divisibile per 7, cioè $N + 5$ è divisibile per 7
- 9 è vera se e solo se 10 è falsa.

Supposto 10 vera (e 9 falsa), 7 e 8 sono vere. Perciò $N - 9$ è una potenza di 3 e $N - 7$ è una potenza di 2. ↯
Dunque 10 è falsa (e 9 vera); almeno una tra 7 e 8 è falsa. Supposto 8 vera, allora $N - 10$ è una potenza di 3 e $N - 6$ è una potenza di 2. ↯
Perciò 8 è falsa.
La situazione è ora la seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
falsa	falsa	vera	vera	vera	falsa		falsa	vera	falsa	falsa	vera	falsa

Riassumendo, si sa che

- $N - 1$ è divisibile per 3
- $N + 5$ è divisibile per 7
- $N - 10$ non è una potenza di 3
- N ha 7 divisori e $N - 6$ è una potenza di 2,
  oppure N non ha 8 divisori e $N - 5$ è una potenza di 2

Non ci sono potenze k di 2 minori di 10000 tali che $(k + 6) - 1 = k + 5$ è divisibile per 3 e $(k + 6) + 5 = k + 11$ è divisibile per 7.
Le potenze k di 2 minori di 10000 tali che $(k+5)-1 = k+4$ è divisibile per 3 e $(k+5)+5 = k+10$ è divisibile per 7 sono 32 e 2048. Perciò N può essere 37 oppure 2053. Visto che 27 è una potenza di 3, la risposta è 2053.